



INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa



ACADEMIA MILITAR
DULCE ET DECORUM EST PRO PATRIA MORI

Comparação de modelos de grelha e de elementos finitos de laje na modelação de estruturas de edifícios de betão armado

Luís Filipe Costa dos Santos Neves

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Militar

Júri

Presidente: Professor Doutor José Manuel Matos Noronha da Câmara

Orientador: Professor Doutor Pedro Guilherme Sampaio Viola Parreira

Vogal: Professor Doutor Luís Manuel Soares dos Santos Castro

Outubro 2010

Agradecimentos

Tenho consciência que estes últimos anos, referentes ao meu percurso académico, vão ser os anos que mais recordarei com saudade e felicidade. O conhecimento que adquiri, os limites da minha mentalidade e corpo que desvendi, a transformação da forma como observo e compreendo o ambiente que me rodeia e, particularmente, as pessoas que conheci, foram acontecimentos que jamais irão ocorrer com tal intensidade. Portanto gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos às seguintes pessoas que me acompanharam e muito contribuíram, não só nesta dissertação, como ao longo de todo o curso:

Ao Professor Pedro Parreira, meu orientador, pela indubitável disponibilidade, não só ao longo de todo este período da elaboração da dissertação como na hora em que prontamente aceitou orientar-me nesta dissertação. Pela forma como acreditou em mim e me incentivou a avançar sem medo, seguindo a minha intuição e aprendendo com os meus erros, na escrita desta dissertação. É um passo muito importante na vida de cada um e que ninguém o pode dar por nós.

Ao Professor Luís Castro pela enorme disponibilidade e paciência ao longo das várias horas de esclarecimentos suplementares que me administrou. Agradeço também toda a bibliografia e informação que me facultou.

Aos meus pais e família, que puseram à minha disposição as ferramentas para a construção da pessoa que sou hoje.

A todos que estiveram na Academia Militar durante a minha passagem e à própria instituição, por todas as experiências que me proporcionaram, e pelo contributo na minha formação profissional e pessoal, dando-me capacidades que muito contribuíram para a elaboração rigorosa e profissional desta dissertação.

Por último, mas sem dúvida o agradecimento mais querido, aos meus Amigos. À Sofia Frade, Ana Sá, Pedro Coelho, Sofia Reis, Rita Oliveira, João Marques, pelo companheirismo e amizade durante o curso, e um agradecimento especial à Catarina Ivo e ao Tiago Flambó por todo o apoio e amizade durante o período de elaboração desta dissertação.

Resumo

Nesta dissertação é proposto comparar os resultados, para uma laje de pavimento, obtidos por uma análise de um modelo de elementos de laje e pela análise de um modelo de elementos de grelha. Em cada modelo é testada a influência do momento torsor e da rigidez de torção, respectivamente.

Embora os dois modelos não estejam ao mesmo nível de utilização por parte dos engenheiros civis, importa saber quais as vantagens e quais os pontos fracos a ter em conta em cada modelo.

Ambos os modelos foram testados com o auxílio do programa de cálculo automático SAP2000, usando elementos básicos do programa para modelar os elementos de laje e os elementos de grelha.

A comparação dos resultados é organizada em 3 partes. Esta inicia-se na análise da rigidez lateral da estrutura, onde se pretende averiguar a influência global de cada modelo na estrutura. Posteriormente comparam-se os deslocamentos a fim de perceber qual o modelo que permite maiores flechas. Na terceira parte são analisados os esforços, com as variantes da torção. Nesta pretende-se estudar as variações dos esforços de modelo para modelo, averiguando o efeito da consideração ou não da parcela da torção.

Palavras-chave:

Elementos Finitos

Elementos de Laje

Analogia de Grelha

Elementos de Grelha

Laje de pavimento

Abstract

This dissertation proposes the comparison of results obtained for a pavement slab, through the analysis of a slab element model and grid element model. The influence of the torsional moment and torsional stiffness are tested in each model, respectively.

Although the use by civil engineers is different for both models, it is important to know what advantages and disadvantages should be considered in each model.

Both models were tested with the aid of the SAP2000 automatic calculation computer program, using basic elements of the program to model both the slab elements and the grid elements.

The result comparison is organized into three parts. The first part begins by the analysis of the structure's lateral stiffness with the intention of determining the overall influence of each model on the structure. Next, we compare the displacements in order to understand which model leads to larger deflections. The third part analyzes the stress, with the torsion variants. This is aimed at examining variations in stress for both models by analyzing the effect of considering, or not, the torsion segment.

Keywords:

Finite Element

Slab Element

Grid Analogy

Grid Element

Pavement Slab

Índice geral

Índice

1	Introdução	1
1.1	Enquadramento Geral	1
1.2	Objectivos	1
1.3	Organização do documento	2
2	Fundamentação Teórica	3
2.1	Considerações Iniciais	3
2.2	Teoria da Elasticidade	4
2.2.1	Generalidades	4
2.2.2	Variáveis e Relações Fundamentais [4] [10]	4
2.3	Método dos Elementos Finitos	6
2.3.1	Considerações Iniciais	6
2.3.2	Breve introdução do MEF	6
2.3.3	Introdução aos Elementos Finitos e fenómeno de travamento	7
2.3.4	Elementos finitos lineares [10]	9
2.3.4.1	Elemento de viga segundo a teoria de Euler-Bernoulli	9
2.3.4.2	Elemento de viga segundo a teoria de Timoshenko	11
2.3.5	Elementos finitos para lajes finas [11] [16]	13
2.3.5.1	Elemento não-conforme	14
2.3.5.2	Elemento conforme [16]	16
2.3.6	Elementos finitos para lajes espessas [11]	17
2.3.7	Elemento DKT (Discrete Kirchhoff Theory) [19] [20]	18
2.4	Analogia de Grelha	20
2.4.1	Considerações Iniciais	20
2.4.2	Malha a adoptar para a grelha equivalente	22
2.4.3	Características dos elementos de grelha	23
2.4.3.1	Rigidez de flexão – EI [5]	24
2.4.3.2	Rigidez de Torção – GJ [23]	25
2.4.4	Carregamento da grelha [5]	27

2.4.5	Análise da solução [5]	28
3	Caso de estudo	31
3.1	Considerações Iniciais	31
3.2	Descrição da Estrutura	31
3.2.1	Aspectos Gerais	31
3.2.2	Elementos estruturais	33
3.3	Ações consideradas	34
3.4	Modelação	36
3.4.1	Criação da grelha tridimensional	36
3.4.2	Definição do material	37
3.4.3	Modelação de vigas, pilares e núcleo	38
3.4.4	Modelação das fundações	39
3.4.5	Modelação da laje de pavimento com elementos de grelha	40
3.4.6	Modelação laje de pavimento com elementos de laje	41
4	Análise e interpretação de resultados	43
4.1	Considerações Iniciais	43
4.2	Análise da rigidez lateral da estrutura	43
4.3	Análise de deformações na laje	45
4.4	Análise de esforços na laje	53
5	Conclusões	67
6	Referências bibliográficas	69
A.	Funções de aproximação	73
A.1	Elemento ACM	73
A.2	Significado físico das funções de forma do elemento BFS	75
A.3	Elemento rectangular de 4 nós para lajes de Reissner-Mindlin	76
B.	Desenhos de arquitectura	77
C.	Modos de Vibração	81

Índice de Figuras

Figura 2.1 – Relações entre variáveis.....	5
Figura 2.2 – Graus de liberdade num elemento de viga (Adaptado de [10])	9
Figura 2.3 – Significado físico da aproximação para o elemento de viga fina.....	10
Figura 2.4 – Significado físico da aproximação dos campos aproximados (Adaptado de [10]) .	12
Figura 2.5 – Elementos conformes e não-conformes	14
Figura 2.6 – Elemento ACM (Adaptado de [11])	15
Figura 2.7 – Funções de Hermite de 1ª ordem (Adaptado de [16])	16
Figura 2.8 - Desenvolvimento do elemento DKT. (a) Fase inicial; (b) Fase Final [20]	19
Figura 2.9 - Laje e grelha equivalente.....	21
Figura 2.10 – Malhas com diferentes espaçamentos (Adaptado de [23])	22
Figura 2.11 - Barra de extremidade (Adaptado de [23])	23
Figura 2.12 – Graus de liberdade de um elemento de grelha (Adaptado de [24])	23
Figura 2.13 - Largura b do elemento de grelha (Adaptado de [23]).....	24
Figura 2.14 - Deformada da secção da uma viga	25
Figura 2.15 - Tipos de carregamento nos elementos de grelha (Adaptado de [24])	27
Figura 2.16 - Campos de esforços nas lajes e grelhas (Adaptado de [5])	28
Figura 3.1 – Vista noroeste da estrutura do edifício	32
Figura 3.2 – Vista sudoeste da estrutura do edifício.....	32
Figura 3.3 – Planta da laje	34
Figura 3.4 – Ajuste da posição das peças verticais à grelha de 0,8mx0,8m	37
Figura 3.5 – Representação da modelação do núcleo de elevador no SAP2000	39
Figura 3.6 – Ligação do nó da fundação ao núcleo central sapata	40
Figura 3.7 – Passagem de uma área da laje aos respectivos elementos de grelha	40
Figura 4.1 – Alinhamentos de pontos seleccionados.....	45
Figura 4.2 – Momento flector a efeito combinado sobre o pilar P3	61
Figura A.1 – Significado físico da aproximação do elemento ACM [11]	74
Figura A.2 – Significado físico da aproximação do elemento BFS [11]	75
Figura A.3 – Significado físico da aproximação para elemento trapezoidal de 4 nós	76
Figura B.1 – Planta do Piso 1,2 e 3	77
Figura B.2 – Corte AB	78
Figura B.3 – Corte CD	79
Figura B.4 – Planta estrutural do piso 1, 2 e 3.....	80
Figura C.1 – 1º Modo de vibração.....	81
Figura C.2 – 2º Modo de vibração.....	81
Figura C.3 – 3º Modo de vibração.....	82
Figura C.4 – 4º Modo de vibração.....	82
Figura C.5 – 5º Modo de vibração.....	83
Figura C.6 – 6º Modo de vibração.....	83

Figura C.7 – 7º Modo de vibração.....	84
Figura C.8 – 8º Modo de vibração.....	84
Figura C.9 – 9º Modo de vibração.....	85
Figura C.10 – 10º Modo de vibração.....	85

Índice de Tabelas

Tabela 2.1 – Teorias de vigas e de lajes	8
Tabela 3.1 – Dimensões das paredes no núcleo de elevador	33
Tabela 3.2 – Dimensões dos pilares	33
Tabela 3.3 – Dimensões das vigas estruturais (ou vigas de bordadura)	33
Tabela 3.4 – Espessura das lajes de pavimento	33
Tabela 3.5 – Acções permanentes sobre o piso	35
Tabela 3.6 – Acções permanentes sobre as vigas de bordadura	35
Tabela 4.1 – Tabelas dos períodos e frequências dos modelos usados	44
Tabela 4.2 – Deslocamentos ao longo do alinhamento AA'	46
Tabela 4.3 – Deslocamentos ao longo do alinhamento BB'	49
Tabela 4.4 - Deslocamentos ao longo do alinhamento CC'	51
Tabela 4.5 – Esforços segundo o alinhamento AA'	54
Tabela 4.6 – Esforços ao longo do alinhamento BB'	58
Tabela 4.7 - Esforços ao longo do alinhamento CC'	63

Índice de Gráficos

Gráfico 4.1 – Rigidez lateral da estrutura através dos três modelos	44
Gráfico 4.2 – Deslocamentos ao longo do alinhamento AA'	47
Gráfico 4.3 - Deslocamentos ao longo do alinhamento BB'	50
Gráfico 4.4 – Deslocamentos ao longo do alinhamento DD'	52
Gráfico 4.5 – Esforço transversal no alinhamento AA'	55
Gráfico 4.6 – Momento flector ao longo do alinhamento AA'	56
Gráfico 4.7 – Esforço transversal ao longo do alinhamento BB'	57
Gráfico 4.8 – Momento flector ao longo do alinhamento BB'	59
Gráfico 4.9 – Momento flector (laje) e Efeito Combinado – Alinhamento BB'	60
Gráfico 4.10 – Momento flector (grelha) e Efeito Combinado - Alinhamento BB'	61
Gráfico 4.11 – Esforço transversal ao longo do alinhamento CC'	62
Gráfico 4.12 – Momento flector ao longo do alinhamento CC'	65
Gráfico 4.13 – Momento flector e Efeito Combinado no Alinhamento CC'	66

Notação

Apresenta-se uma lista de símbolos utilizados ao longo da dissertação. Qualquer símbolo não identificado nesta lista encontra-se definido na zona do texto onde é referido.

f – Vector das forças externas aplicadas ao longo domínio

\mathcal{V} – Volume (de um corpo genérico ou de um elemento finito)

Γ – Fronteira (de um corpo genérico ou de um elemento finito)

Γ_σ – Fronteira estática (de um corpo genérico ou de um elemento finito)

Γ_γ – Fronteira cinemática (de um corpo genérico ou de um elemento finito)

t_γ – Forças externas aplicadas ao longo fronteira estática

u – Vector dos deslocamentos

w – Vector dos deslocamentos transversais

θ – Vector das rotações

e – Vector das deformações

s – Vector do campo de esforços

A – Operador diferencial de compatibilidade

N – Vector que lista as componentes do vector unitário normal à fronteira

A'' – Operador diferencial de equilíbrio

K – Matriz de rigidez/Operador elástico

ε – Tensor das deformações ou vector que lista as componentes independentes do tensor

σ – Tensor das tensões ou vector que lista as componentes independentes do tensor

E – Módulo de elasticidade do material elástico linear

ν – Coeficiente de Poisson do material elástico linear

χ – Componente de deformação por flexão

γ – Componente de deformação por esforço transversal

G – Módulo de distorção do material elástico linear

\emptyset – Factor de corte

D_f – Rigidez de flexão da laje

Ψ – Matriz das funções de aproximação

d – Vector de deslocamentos nodais do elemento

q – grau de liberdade em elementos lineares

d – grau de liberdade em elementos laminares

h – Espessura da peça laminar

J – Constante de Torção do elemento de grelha

\emptyset' – Rotação do elemento de grelha

r – carga aplicada no elemento de barra no modelo de grelha

α – coeficiente de repartição de cargas

Abreviaturas

MEF – Método dos Elementos Finitos

ELS – Estado Limite de Serviço

ELU – Estado Limite Último

1 Introdução

1.1 Enquadramento Geral

Na análise do comportamento de estruturas, com base na teoria da elasticidade linear, a solução para um problema de hiperestaticidade consiste na resolução de um sistema de equações, envolvendo relações de equilíbrio, compatibilidade e relações constitutivas, resolvido simultaneamente num sistema de equações de derivadas parciais cujas incógnitas são os esforços, as deformações e os deslocamentos. [1] [2] Para facilitar a aplicação desta técnica em problemas não elementares, era comum recorrer a séries de Fourier. No entanto, devido à sua complexidade, estes procedimentos só eram aplicáveis a meios contínuos homogêneos e de geometria simples [3], onde para a maioria dos quais a solução está tabelada. Nos casos mais actuais, onde se pretende analisar dois ou mais painéis simultaneamente ou elementos cujas características geométricas e as cargas aplicadas não permitem a obtenção de uma solução analítica, é necessário recorrer a técnicas numéricas. [4]

Na sequência desta limitação, na década de 50, foi criado o *Método dos Elementos Finitos* (MEF), baseado no Princípio da Sobreposição, mas utilizando a análise numérica. [5] Pelo facto de ser uma técnica que implica a resolução de grandes sistemas de equações (consequência do grau de hiperestaticidade das estruturas), no início dos anos 70, o MEF era limitado a computadores caros e de grande porte, tendo sido a NASA a pioneira no desenvolvimento dos primeiros programas de Elementos Finitos. [6]

O enorme progresso tecnológico do século XX (que tornou os computadores acessíveis a qualquer técnico) impulsionou a criação e o desenvolvimento de softwares de elementos finitos e de vários tipos de elementos para modelar as estruturas.

A potência e o volume de informação gerados nestes softwares, pode ser indispensável quando se pretende analisar uma estrutura complexa ou de forma irregular, mas por outro lado dificulta a tarefa ao engenheiro quando este pretende analisar uma estrutura mais simples (como é o caso de moradias ou edifícios de dimensões correntes). [5]

1.2 Objectivos

Esta dissertação visa comparar os resultados obtidos da análise da laje de pavimento de um edifício comum para habitação, caracterizada por uma geometria regular, quando usadas dois métodos de análise de estruturas. O MEF, teoria usada actualmente pela maioria dos projectistas, e o método da analogia de grelha, teoria usada com muita regularidade antes da generalização da utilização do MEF.

Pretende-se tirar conclusões relativamente às especificidades de cada modelo, contabilizando algumas vantagens e desvantagens da utilização de cada modelo numa estrutura regular comum e até que ponto se pode usar um modelo em substituição do outro sem deteriorar a qualidade da solução final.

Inicialmente, vai analisar-se a rigidez lateral da estrutura, nos dois modelos. Aqui, pretende observar-se de forma imediata o efeito do recurso a cada um dos modelos, de análise de estruturas, na estrutura.

De seguida, vão estudar-se os deslocamentos e esforços em três alinhamentos de pontos, em ambos os modelos, tendo em vista os resultados mais condicionantes, necessários ao dimensionamento da estrutura. Pretende saber-se até que ponto estes modelos fornecem diferentes resultados. Nesta análise serão feitas variações percentuais, a fim de facilitar a interpretação as eventuais diferenças.

1.3 Organização do documento

Esta dissertação encontra-se dividida em 5 capítulos, sendo o capítulo da Introdução o primeiro.

No segundo capítulo, inicialmente abordam-se os conceitos básicos da análise de estruturas, como as variáveis e as respectivas equações fundamentais que permitem o relacionamento das primeiras. De seguida são abordados dois métodos de análise de estruturas: o Método dos Elementos Finitos, onde se foca essencialmente os elementos finitos e não o método em si, devido à sua já vasta divulgação. Começa-se por apresentar alguns exemplos de elementos finitos lineares e laminares primários, terminando nos elementos finitos mais complexos, usados frequentemente nos programas de cálculo actuais; e a Analogia de Grelha, onde se espelham algumas orientações na definição dos elementos que envolvem todo o processo, a malha, as características dos elementos, o carregamento e a própria análise da solução obtida neste método.

O terceiro capítulo é todo dedicado ao caso de estudo. Iniciando-se por apresentar a estrutura que vai ser modelada. De seguida é detalhada a forma como foi modelada, dando especial atenção à forma como cada teoria foi associada a um elemento e à forma como ambos os elementos, que simulam a laje de pavimento, foram modelados. Por fim especifica-se o carregamento aplicado na laje de pavimento modelada.

No capítulo quatro efectua-se a análise e interpretação de resultados provenientes dos dois modelos usados na modelação da laje de pavimento. Começa-se por analisar a rigidez lateral da estrutura, de seguida os deslocamentos e os esforços ao longo de três alinhamentos de pontos da laje.

O capítulo quinto é dedicado às conclusões que se retiraram desta.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Considerações Iniciais

Primeiramente abordar-se-á ligeiramente a teoria da elasticidade, onde se pretende, apenas, auxiliar os leitores a relembrar alguns conceitos que serão utilizados posteriormente com alguma frequência.

A Teoria das Lajes, desenvolvida com base na teoria matemática da elasticidade, onde o material é elástico linear (Lei de Hooke), homogêneo e isótropo, proporciona a equação geral das placas, obtida por Lagrange em 1811 (2.1),

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D_f} \quad (2.1)$$

em que,

D_f – Rigidez de flexão da laje, cuja expressão é,

$$D_f = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

que relaciona a deformada elástica da placa com a carga unitária, na área da placa. A solução da equação geral das placas é uma tarefa muito complicada, o que motivou o aparecimento de diversas tabelas, de diferentes origens e autores, com coeficientes que proporcionam o cálculo aproximado dos momentos flectores e das flechas para casos específicos de apoios e carregamentos

Diversos métodos para a análise e dimensionamento de lajes de betão armado têm sido propostos e usados ao longo dos anos. São usados para determinar deslocamentos, esforços, elementos de apoio e a capacidade de carga das lajes. A forma como é discretizada a estrutura pode variar consoante os elementos que se pretende usar. Nesta dissertação, a estrutura vai ser estudada usando o MEF, com base nos elementos de laje; e a analogia de grelha, usando elementos de barra.

A segunda parte desta introdução teórica vai basear-se no MEF, mais propriamente nos elementos finitos usados no mesmo. Por fim, será apresentada a analogia de grelha.

2.2 Teoria da Elasticidade

A teoria da elasticidade, há dezenas de anos leccionada no curso de Engenharia Civil, dispensa qualquer tipo de apresentação. Assim apenas são abordadas as relações fundamentais entre variáveis, para que o leitor obtenha uma visão global do processo de determinação dos deslocamentos, esforços e deformações em qualquer ponto do corpo genérico.

No que toca à teoria da elasticidade, a informação apresentada não é suficiente para que se possa fazer um raciocínio lógico e enquadrado de área em questão. O facto atrás mencionado faz com que se remeta o leitor para as obras como, Timoshenko [7], cujo conteúdo embora pouco sistemático, é muito completo. Salienta-se ainda a obra de Novozhilov [8], que prima pela clareza e sistematização.

2.2.1 Generalidades

A Teoria da Elasticidade na sua forma mais clássica é uma teoria de peças lineares. Na teoria das peças lineares, apenas o seu eixo é representado. Nesta admite-se ainda que, quer as cargas quer as condições de apoio, estão sempre localizadas em pontos sobre esse mesmo eixo.

Transpondo esta teoria, e suas considerações, para peças laminares, como é o caso das lajes, apenas o seu plano médio é representado, e admitindo-se que as condições de apoio têm existência apenas em pontos desse plano e que as cargas são tais que conduzem principalmente a esforços não existentes nesse plano. [4]

A linearidade referida resulta de hipóteses simplificativas, tanto de ordem física como de ordem geométrica.

A hipótese da linearidade física consiste em assumir para o material um comportamento elástico linear. Este pressuposto simplifica as relações constitutivas, permitindo uma relação linear entre tensões e deformações.

Na hipótese da linearidade geométrica, insere-se a hipótese dos pequenos deslocamentos. Admitindo isto, as relações deformações-deslocamentos passam a ser lineares, isto é, as componentes de deformação passam a ser combinações lineares de derivadas das componentes de deslocamento. É com base nessa configuração que são estabelecidas as condições de equilíbrio. [9] [10]

2.2.2 Variáveis e Relações Fundamentais [4] [10]

Para fazer a análise do comportamento estrutural de um elemento de laje é necessário definir três conjuntos de grandezas:

- Campo de deslocamentos – u – que define o movimento de cada um dos seus pontos durante a deformação, através de w e de θ_x e θ_y .
- Campo de deformações – e – que mede a mudança da forma do elemento, através de χ_{xx} , χ_{yy} , χ_{xy} , e de γ_{xz} , γ_{yz} .
- Campo de esforços – s – que permite determinar o campo de tensões σ . Cada componente do tensor das tensões está associada ao momento flector m_{xx} , m_{yy} e m_{xy} . A integração da componente do tensor das tensões, na secção transversal, dá origem ao esforço transversal v_x e v_y .

As variáveis e respectivas grandezas que descrevem o comportamento da peça relacionam-se através de 3 equações fundamentais (Figura 2.1):

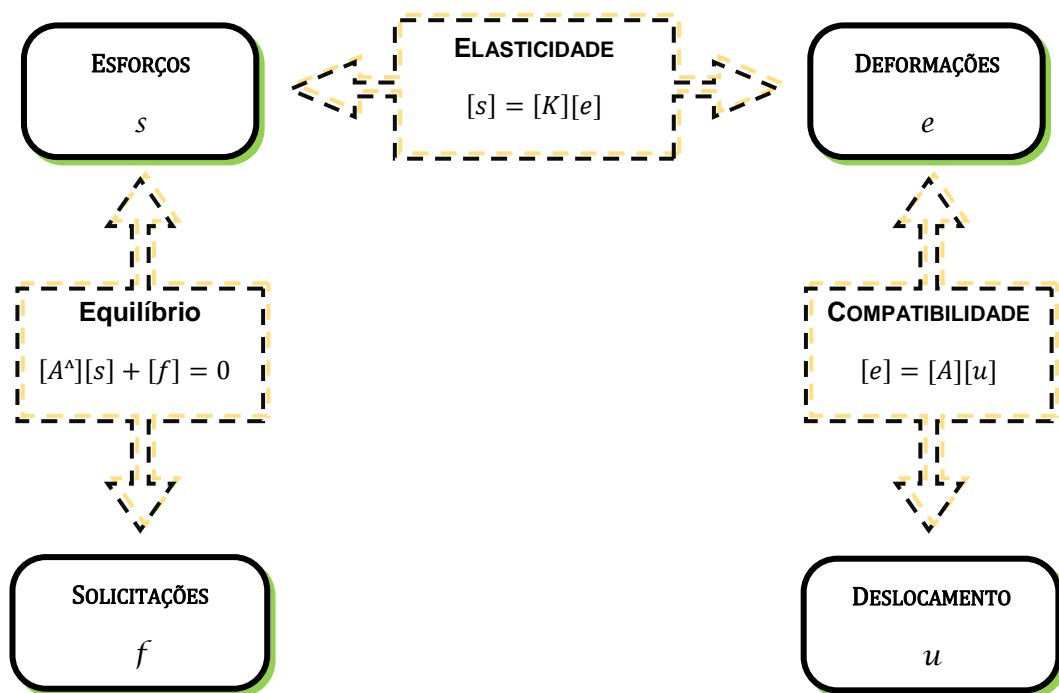


Figura 2.1 – Relações entre variáveis

Relações Fundamentais:

- Condições de Compatibilidade - estabelecem a relação entre as grandezas cinemáticas, campos de deslocamentos u e de deformações e . Escrito no formato matricial, vem:

$$[e] = [A][u] \quad (2.2)$$

- Condições de Equilíbrio – estabelecem a relação entre as grandezas estáticas, campo de esforços s e solicitações. Escrito na sua forma matricial, vem:

$$[A^t][s] + [f] = 0 \quad \text{em } V \quad (2.3)$$

$$[N][s] = t_\gamma \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (2.4)$$

Os operadores diferenciais A e A^t são adjuntos, ou seja,

$$A_{ij}^t = -1^{n+1} A_{ji} \quad (2.5)$$

onde n representa a ordem do operador diferencial.

- Relações de Elasticidade – permitem estabelecer relações entre esforços s e deformações e . A sua forma matricial é dada pela expressão:

$$[s] = [K][e] \quad (2.6)$$

O operador K é designado por matriz de rigidez.

2.3 Método dos Elementos Finitos

2.3.1 Considerações Iniciais

Geralmente processado por computadores, o MEF, exige que o projectista que o aplique tenha perfeito conhecimento dos seus fundamentos, configurações e condições que são diferentes em todos os casos, caso contrário, põe-se em causa a segurança dos resultados fornecidos.

Após uma breve resenha do seu aparecimento no Capítulo 1 desta dissertação, pretende-se agora abordar quais as características mais particulares deste método. No entanto, devido à sua já vasta divulgação, será dada uma pequena introdução ao método, sendo referenciadas quais as particularidades que mais marcam o mesmo.

De seguida é dado maior ênfase aos elementos finitos. Começa-se por abordar o fenómeno do travamento que servirá de introdução aos elementos finitos lineares, nomeadamente o elemento de viga de Euler-Bernoulli e o elemento de viga de Timoshenko. Posteriormente aborda-se com maior atenção os elementos finitos de lajes. Com o objectivo de enquadrar o elemento DKT, começou-se pelos elementos de lajes finas, focando a atenção em questões de compatibilidade, definindo primeiro os elementos não-conformes, exemplificado com elemento ACM, e de seguida os elementos conformes, exemplificado com o elemento BFS. De seguida apresentar-se-á de forma sucinta os elementos de lajes espessas, para a culminar com a apresentação o elemento DKT, usado actualmente pela maioria dos softwares de integração numérica, e que reúne ambas as teorias na sua formulação.

2.3.2 Breve introdução do MEF

O conceito do MEF baseia-se na divisão do domínio em análise num número finito de subdomínios de forma simples e dimensões variadas, denominados elementos finitos, assumindo-se no seu interior leis simples de comportamento, dependentes das variáveis em estudo. Nos elementos finitos clássicos as variáveis do problema são o valor das funções a aproximar num determinado número de nós, dependendo do tipo de elemento utilizado. Cada nó e cada componente da solução diferencial têm associado uma função de forma ou interpolação, com valor unitário no referido nó, sendo nulo nos restantes. A combinação linear

destas funções define a solução do problema. A ligação entre os elementos é feita obrigando os nós coincidentes entre elementos a terem parâmetros iguais. [3]

O MEF, na sua vertente dos modelos de compatibilidade, aproxima o campo de deslocamentos independentes, obtendo posteriormente, o campo de tensões, através da aplicação das condições de compatibilidade e das condições de elasticidade. Da utilização deste procedimento ocorre um erro associado à constante derivação. Assim, a qualidade de uma solução vai-se degradando à medida que se calculam derivadas para passar do conhecimento de uma grandeza para outra que se pretenda determinar. Pode-se então afirmar que a aproximação conseguida para o campo de deslocamentos transversais é superior à obtida para o campo de momentos flectores.

Outra característica geral das soluções obtidas com recurso ao MEF é a de não satisfazer as condições de admissibilidade estática, pelo que o campo de esforços não satisfaz localmente as condições de equilíbrio. De acordo com os teoremas da análise plástica limite, resulta uma solução contra a segurança do ponto de vista do dimensionamento de estruturas. [10] O erro pode ser diminuído através do refinamento da malha com o aumento do número de graus de liberdade e/ou com uma distribuição mais adequada dos graus de liberdade pelo domínio. O aumento do número de graus de liberdade pode ser obtido utilizando mais elementos e/ou utilizando elementos de grau mais elevado. [11]

Devido à expansão e conhecimento geral do MEF, não será abordada a formulação inerente. Pelo que se remete o leitor mais interessado para as obras de Reddy [12], Hughes [13] e Cook [14], que de uma forma muito directa e concisa apresentam toda a formulação relativa ao MEF.

Para complemento de informação, de uma forma mais formal e enquadrada, sobre o método em si, a forma como se processa, as fases que o caracterizam e a metodologia de cada fase, remete-se o leitor para Freitas [15]. Esta informação pode também ser encontrada, de um modo mais informal e académico, em Reis [6].

2.3.3 Introdução aos Elementos Finitos e fenómeno de travamento

Com base na consideração, ou não, da deformação por esforço transversal¹, foram compostas diversas teorias sobre o comportamento elástico dos materiais. As teorias mais divulgadas foram a Teoria de Euler-Bernoulli e a Teoria de Timoshenko para as vigas e a Teoria de Kirchhoff e Teoria de Reissner-Mindlin para as lajes. Devido ao generalizado conhecimento destas teorias dispensa-se a sua apresentação e remete-se os leitores para Reddy [12], Castro [10] e Leitão [4]. Assim apenas serão apresentados, de forma muito sucinta, alguns dos elementos finitos associados às referidas teorias. Contudo o efeito do travamento

¹ Também conhecida como de formação por corte, terminologia que passará a ser adoptada.

(shear locking na nomenclatura inglesa), que pode ocorrer na análise de vigas de Timoshenko e de lajes de Reissner-Mindlin, já não é tão trivial e, devido à sua importância, importa ser abordado com mais detalhe.

Como se sabe, as teorias atrás referidas, diferenciam-se pela inclusão, ou não, da deformação por esforço transversal (Tabela 2.1).

Tabela 2.1 – Teorias de vigas e de lajes

<i>Elemento</i>	Fino (s/ deformação por corte)	Espesso (c/ deformação por corte)
Viga	Euler-Bernoulli	Timoshenko
Laje	Kirchhoff	Reissner-Mindlin

As peças em que a influência do esforço transversal é relevante consideram-se como espessas (por norma a relação de vão/altura da secção da transversal das peças comuns na Engenharia Civil é demasiado elevada para que se possam considerar de espessas). Importa realçar o aspecto que leva muitos projectistas a optar preferencialmente pelas teorias de elementos espessos: Se, ao analisar um elemento espesso com recurso à teoria de vigas de Timoshenko e de lajes de Reissner-Mindlin, se reduzir consecutivamente a espessura h , a influência da deformação por corte vai diminuindo e a solução obtida tende a recuperar a solução obtida pela teoria de vigas de Euler-Bernoulli e de lajes de Kirchhoff respectivamente.

É nestas condições que se pode originar e observar o fenómeno do travamento, pois ao diminuir a espessura do elemento, a contribuição da deformação por corte vai diminuindo progressivamente, até que no limite se anula. O fenómeno do travamento é visível neste momento, quando era esperada a recuperação da solução de elementos finos e ao invés disso a solução obtida assume um comportamento completamente irregular. Castro [10] ilustra o porquê de tal solução.

Este fenómeno, tomando como exemplo o caso das vigas de Timoshenko², está ligado à imposição da equação de compatibilidade (2.7),

$$\theta(x) = -\frac{\partial W(x)}{\partial x} + \gamma(x) \rightarrow \theta(x) = -\frac{\partial W(x)}{\partial x} \quad (2.7)$$

em que facilmente se observa que a equação que permite obter o campo de rotações para a teoria de Timoshenko, com o desaparecimento da parcela de corte $\gamma(x)$, tende a igualar o campo de rotações à derivada do campo de deslocamentos transversais. Ora, como as

² O processo é análogo para os elementos de laje de Reissner-Mindlin.

aproximações para cada um dos campos de deslocamentos foram elaboradas com base na teoria de Timoshenko (aproximações lineares e independentes para os campos de rotações e deslocamentos transversais), o modelo de elementos finitos tende a originar uma solução completamente desajustada quando tenta igualar o campo de rotações (campo com variação linear) à derivada do campo de deslocamentos transversais (campo com valor constante), equação (2.7). [10]

Uma vez que o programa de cálculo utilizado, SAP2000, já possui as ferramentas necessárias para evitar este problema, não serão aqui apresentados procedimentos para evitar o fenómeno do travamento, pelo que se remete os leitores mais interessados para Reddy [12].

2.3.4 Elementos finitos lineares [10]

Quando a rigidez de flexão é constante ao longo do elemento, a solução de elementos finitos para os deslocamentos nos nós é exacta para qualquer carregamento transversal. [12] Assim, ao contrário do que acontece com os elementos de laje, as soluções exactas para os elementos de barra são conhecidas, daí não existir uma grande variedade de elementos.

O programa de cálculo automático SAP2000 utiliza um elemento de barra que tanto satisfaz todas as condições para elementos espessos como para elementos finos. Assim, serão apresentadas as características que definem dois elementos, um formulado segundo a teoria de Euler-Bernoulli, outro pela teoria de Timoshenko e por fim o referido elemento usado pelo programa de cálculo SAP2000.

2.3.4.1 Elemento de viga segundo a teoria de Euler-Bernoulli

Os elementos de viga fina caracterizam-se por possuir dois graus de liberdade por nó, associados aos deslocamentos admissíveis, deslocamento transversal e rotação do nó (Figura 2.2).

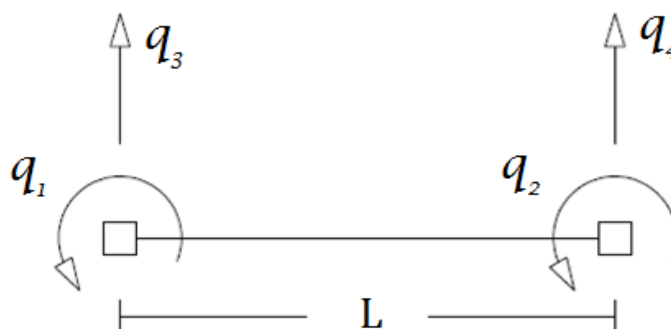


Figura 2.2 – Graus de liberdade num elemento de viga (Adaptado de [10])

Sabe-se que os campos de deslocamentos do elemento de viga de Euler-Bernoulli dependem apenas do deslocamento transversal, uma vez que o campo de rotações depende do campo de deslocamentos transversos. Assim, a aproximação para o campo de deslocamentos é a seguinte:

$$w(x) = \Psi_1(x)q_1 + \Psi_2(x)q_2 + \Psi_3(x)q_3 + \Psi_4(x)q_4 \quad (2.8)$$

em que q representa o deslocamento unitário associado ao grau de liberdade i .

As funções de aproximação são:

$$\Psi_1(x, y) = -x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \quad (2.9)$$

$$\Psi_2(x) = \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \quad (2.10)$$

$$\Psi_3(x) = -1 + \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad (2.11)$$

$$\Psi_4(x) = -\frac{3x}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad (2.12)$$

O elevado grau das funções de aproximação deve-se à presença de segundas derivadas no operador diferencial de compatibilidade que obriga a que se garanta a continuidade dos campos de deslocamentos e das suas primeiras derivadas.

O significado físico de cada função de aproximação é o seguinte:

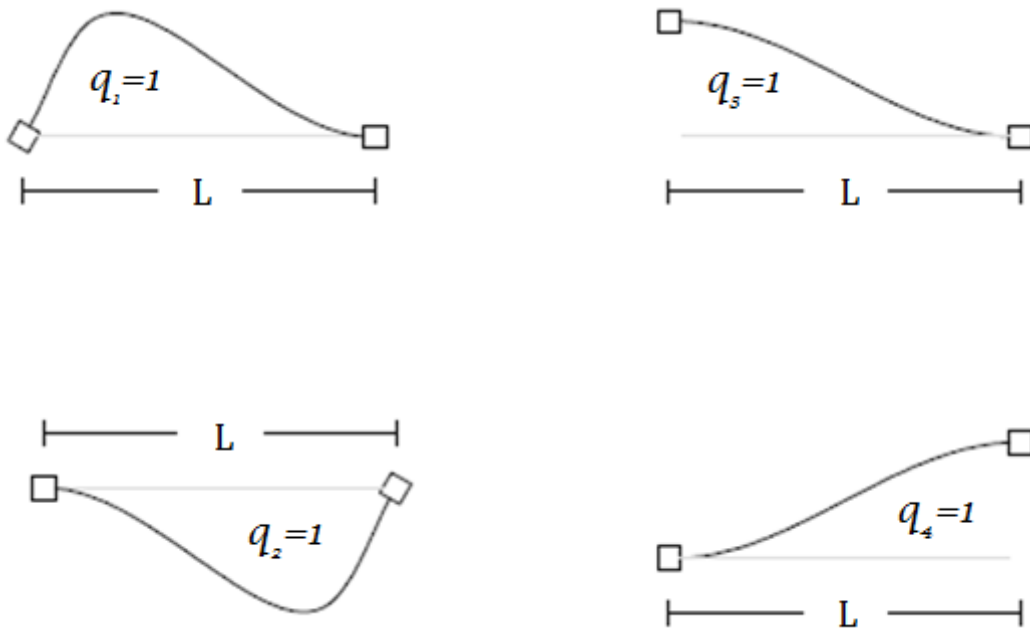


Figura 2.3 – Significado físico da aproximação para o elemento de viga fina

2.3.4.2 Elemento de viga segundo a teoria de Timoshenko

Como nas vigas de Timoshenko os campos de deslocamentos transversais e os campos de rotações são independentes, o campo de deslocamentos é dado por:

$$[u] = \begin{bmatrix} \theta \\ w \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

em que:

$$\theta(x) = \Psi_1(x)q_1 + \Psi_2(x)q_2 \quad (2.14)$$

$$w(x) = -\Psi_1(x)q_3 - \Psi_2(x)q_4 \quad (2.15)$$

As funções de aproximação para o campo de deslocamentos foram escritas em função dos deslocamentos nodais da Figura 2.3.

Como é possível constatar, com apenas duas funções de aproximação dos deslocamentos (Ψ_1 e Ψ_2), aproximam-se os campos de deslocamentos transversais e de rotações. Ou seja, as duas funções de aproximação tanto aproximam os deslocamentos transversais como as rotações da extremidade do elemento. Tal facto acontece devido à necessidade de apenas garantir a primeira derivada, ou seja, garantir a continuidade dos campos aproximados. Assim as funções de aproximação são lineares, tendo a seguinte forma:

$$\Psi_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (2.16)$$

$$\Psi_2(x) = \frac{x}{L} \quad (2.17)$$

O significado físico das funções de aproximação para o campo de rotações e para o campo de deslocamentos encontram-se representados na Figura 2.4 (a) e (b) respectivamente.

³ As funções de aproximação vêm afectadas do sinal negativo para inverter o sinal considerado positivo para esta grandeza, uma vez que estes deslocamentos transversais correspondem a deslocamentos com o sinal negativo. [10]

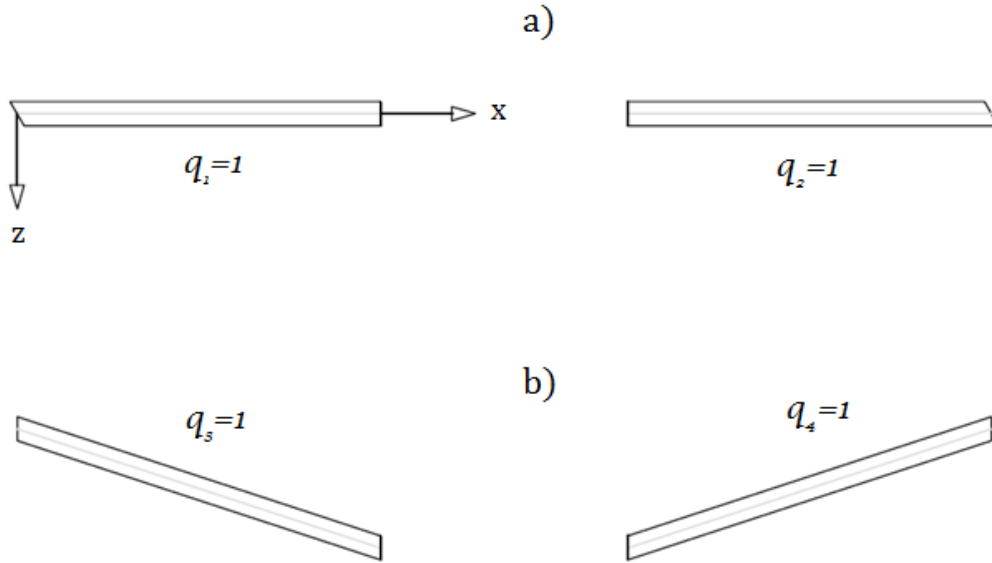


Figura 2.4 – Significado físico da aproximação dos campos aproximados (Adaptado de [10])

O programa de cálculo SAP2000 usa apenas um elemento viga (segundo a teoria de Timoshenko) para todos os casos de barra, mas com uma formulação diferente da formulação atrás apresentada. Este elemento tem a especificidade de quando a barra é espessa, entra em consideração com a deformação por corte, obtendo-se a solução exacta. No entanto, quando a barra é fina, este elemento, pela anulação das suas parcelas de corte (parcelas com a constante f), recupera a solução da teoria de Euler-Bernoulli, obtendo assim a solução exacta para qualquer tipo de elemento de barra.

Neste caso para a Figura 2.2, os campo de aproximação são dados por:

$$w(x) = w_1(x)q_1 + w_2(x)q_2 + w_3(x)q_3 + w_4(x)q_4 \quad (2.18)$$

$$\theta(x) = \theta_1(x)q_1 + \theta_2(x)q_2 + \theta_3(x)q_3 + \theta_4(x)q_4 \quad (2.19)$$

Aqui as funções de aproximação são um pouco mais complexas e têm a seguinte forma:

$$w_1(x) = -1 + \frac{6f}{1+12f}x + \frac{2(1+3f)}{1+12f}\frac{x^2}{L} - \frac{1}{1+12f}\frac{x^3}{L^2}$$

$$\theta_1(x) = 1 - \frac{4(1+3f)}{1+12f}\frac{x}{L} + \frac{3}{1+12f}\frac{x^2}{L^2}$$

$$w_2(x) = \frac{6f}{1+12f}x - \frac{6f-1}{1+12f}\frac{x^2}{L} - \frac{1}{1+12f}\frac{x^3}{L^2}$$

$$\theta_2(x) = \frac{2(6f-1)}{1+12f}\frac{x}{L} + \frac{3}{1+12f}\frac{x^2}{L^2}$$

$$w_3(x) = -1 + \frac{12f}{1+12fL} \frac{x}{L} + \frac{3}{1+12f} \frac{x^2}{L} - \frac{2}{1+12f} \frac{x^3}{L^3}$$

$$\theta_3(x) = \frac{-6}{1+12fL^2} \frac{x}{L^2} + \frac{6}{1+12f} \frac{x^2}{L^2}$$

$$w_4(x) = \frac{-12f}{1+12fL} \frac{x}{L} - \frac{3}{1+12f} \frac{x^2}{L^2} + \frac{1}{1+12f} \frac{x^3}{L^3}$$

$$\theta_4(x) = \frac{6}{1+12fL^2} \frac{x}{L^2} - \frac{6}{1+12f} \frac{x^2}{L^3}$$

em que f , a parcela de corte tem o seguinte significado:

$$f = \frac{EI}{GA'L^2}$$

Assim quando, a deformação por corte $\gamma=0 \rightarrow f=0$, e as funções de aproximação assumem a forma das funções de Hermite, apresentadas em 2.3.4.1.

2.3.5 Elementos finitos para lajes finas [11] [16]

Tal como referido no início deste capítulo, a solução exacta para elementos de laje é muito mais complexa de obter, sendo muitas vezes mesmo impossível.

É relativamente simples obter as funções de aproximação C^0 , nas quais se preserva a continuidade de w . O mesmo não se aplica para elementos com continuidade C^1 . É indispensável alguma destreza para desenvolver funções de interpolação, que verifiquem por completo as equações de compatibilidade, para elementos bidimensionais baseados na teoria de Kirchhoff. A alternativa mais usual é recorrer a funções polinomiais, onde os deslocamentos nodais são as incógnitas da função, conduzindo à obtenção de elementos em que pelo menos uma das condições de compatibilidade é violada. Apesar desta violação, a solução obtida quase não se diferencia da solução cujas condições de compatibilidade são todas verificadas.

Assim, afirma-se que as funções de aproximação podem violar a continuidade de $\frac{dw}{dn}$ entre elementos, embora normalmente não seja nos nós onde a continuidade é imposta. [16]

Elementos que violam qualquer condição de continuidade são conhecidos por elementos não conformes. [12]

2.3.5.1 Elemento não-conforme

Os elementos não-conformes são caracterizados por não terem continuidade nos deslocamentos ou nas respectivas derivadas entre elementos. A dificuldade em encontrar funções de deslocamentos compatíveis leva a que, muitas vezes, se ignora a continuidade completa entre elementos enquanto se continua a respeitar os outros critérios. Contudo, no limite de refinamento, por redução das dimensões do elemento não conforme e com a imposição de continuidade apenas nos nós dos elementos, restaura-se a referida continuidade completa entre elementos e obtém-se a representação dos estados de tensão constante. Nestes casos pode-se afirmar que se obtém convergência. [17] Contudo importa referir que quando se recorre a elementos não-conformes não está garantido que os resultados sejam sempre inferiores à solução exacta.

A dificuldade de impor C^1 nas funções de aproximação resultou em muitas aproximações alternativas onde o problema é torneado. Segundo [18] uma das alternativas mais importantes é a interpolação independente das rotações e deslocamentos transversos, impondo continuidade como uma restrição especial, frequentemente aplicada apenas a pontos discretos.

A grande vantagem dos elementos não conformes bem formulados é poderem fornecer melhores resultados do que os elementos conformes, considerando o mesmo número de elementos finitos e respectivos deslocamentos nodais. Isto surge como consequência da redução da rigidez do modelo discreto de elementos conformes (em relação ao modelo matemático) ao transforma-lo em não conformes. [17]

De uma perspectiva menos formal, mas mais intuitiva, pode afirmar-se que a compatibilidade e o equilíbrio são duas realidades antagónicas e enquanto os elementos Não-conformes se encontram numa posição equidistante, os elementos conformes primam pela compatibilidade em detrimento do equilíbrio (Figura 2.5).

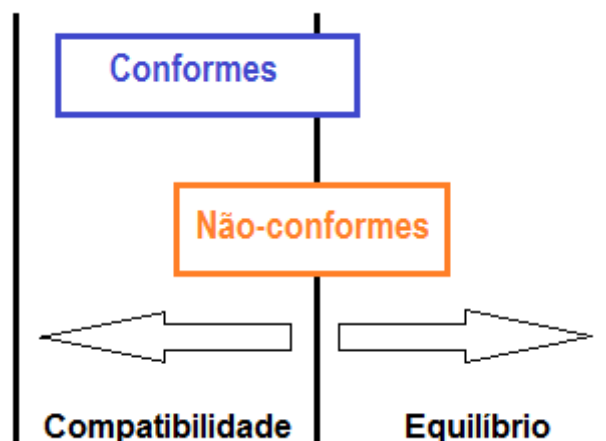


Figura 2.5 – Elementos conformes e não-conformes

Exemplo de um elemento rectangular não-conforme

Um dos elementos finitos não-conformes mais utilizados é o elemento ACM (Adini-Clough-Melosh). Caracteriza-se pela sua forma rectangular de quatro nós, em que cada nó admite três deslocamentos independentes (o deslocamento transversal w e as rotações θ_x e θ_y) como se encontra ilustrado na Figura 2.6.

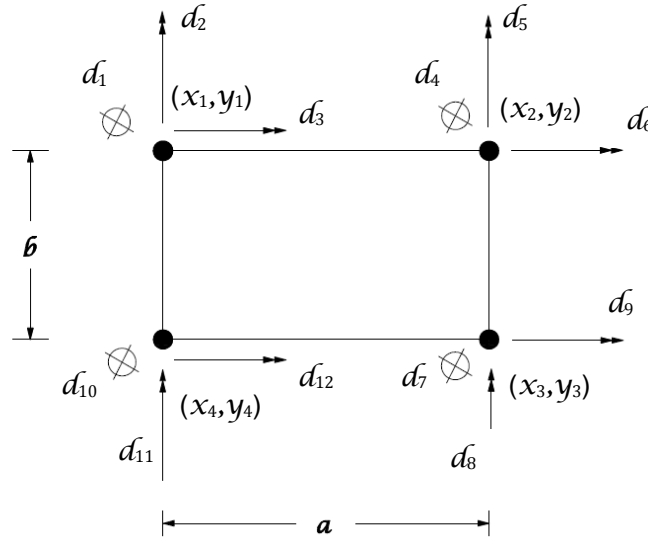


Figura 2.6 – Elemento ACM (Adaptado de [11])

Na formulação de elementos finitos, com base na Teoria de Kirchhoff, a aproximação para o campo de deslocamentos transversais engloba 12 funções de aproximação, correspondentes ao número de graus de liberdade do elemento. Assim vem,

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{12} \psi_i(x, y) d_i \quad (2.20)$$

cada função de aproximação tem a seguinte forma:

$$w(x, y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^3 + c_8x^2y + c_9xy^2 + c_{10}y^3 + c_{11}x^3y + c_{12}xy^3 \quad (2.21)$$

A identificação do significado físico de cada função de aproximação ψ_i pode ser facilmente reconhecida na Figura A.1 do Anexo A.1. Cada figura corresponde à aproximação do campo de deslocamentos transversais obtido aquando da imposição do deslocamento elementar com valor unitário no nó i e se garante que os deslocamentos nos outros nós, $j \neq i$, são nulos. Note-se que apesar de existirem funções de aproximação de 4º grau, a sua aproximação é cúbica.

2.3.5.2 *Elemento conforme [16]*

Nos elementos conformes rectangulares, a compatibilidade é conseguida com o parâmetro nodal adicional⁴ $\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$ que é sempre permissível e não envolve excesso de continuidade, ou seja, não confere demasiada rigidez.

Para estes elementos rectangulares, as funções de forma polinomiais são facilmente determinadas. Das várias alternativas existentes apenas uma será apresentada – a derivação alternativa recorrendo a polinómios de Hermite, que permite anotar as funções adequadas directamente.

Sabe-se, da teoria das vigas de Timoshenko, que da solução analítica e respectiva derivada, quando se elimina a deformação por corte, recupera-se um conjunto de polinómios de Hermite que fornece funções de forma para um elemento de viga. A Figura 2.7 mostra um conjunto de funções cúbicas, onde é fácil verificar que as funções de forma são dadas por:

$$H_1(x) = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \quad (2.22)$$

$$H_2(x) = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (2.23)$$

$$H_3(x) = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \quad (2.24)$$

$$H_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad (2.25)$$

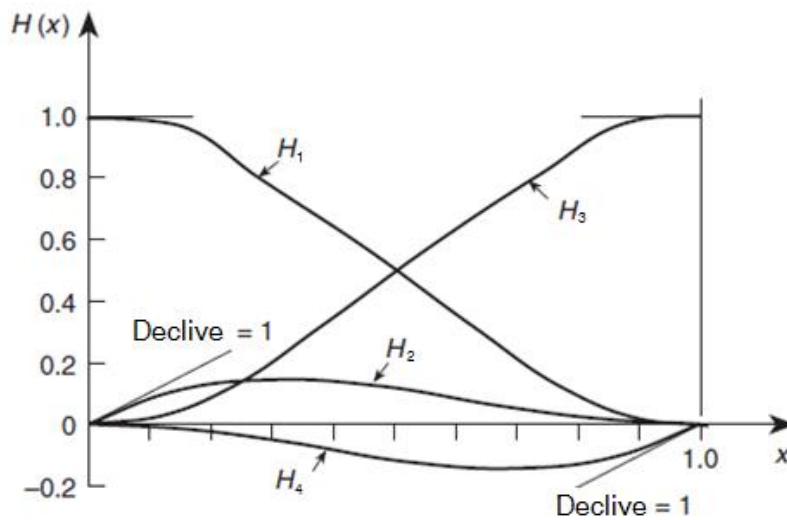


Figura 2.7 – Funções de Hermite de 1ª ordem (Adaptado de [16])

⁴ Aos graus de liberdade usuais, o deslocamento transversal e as duas rotações, junta-se agora este grau de liberdade nodal adicional, que por sua vez está associado ao valor de curvatura no nó.

Uma vez que estas funções de Hermite permitem verificar a condição de continuidade em domínios unidimensionais, o produto de duas funções de Hermite, uma definida em x outra definida em y , conduzem à função de interpolação deste elemento conforme num domínio bidimensional.

É fácil verificar que as seguintes funções de forma,

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(x, y) &= H_1(x) \times H_1(y) & \Psi_5(x, y) &= H_3(x) \times H_1(y) \\
 \Psi_2(x, y) &= H_2(x) \times H_1(y) & \Psi_6(x, y) &= H_4(x) \times H_1(y) \\
 \Psi_3(x, y) &= H_1(x) \times H_2(y) & \Psi_7(x, y) &= H_3(x) \times H_2(y) \\
 \Psi_4(x, y) &= H_2(x) \times H_2(y) & \Psi_8(x, y) &= H_4(x) \times H_2(y) \\
 & & & (2.26) \\
 \Psi_9(x, y) &= H_3(x) \times H_3(y) & \Psi_{13}(x, y) &= H_1(x) \times H_3(y) \\
 \Psi_{10}(x, y) &= H_4(x) \times H_3(y) & \Psi_{14}(x, y) &= H_2(x) \times H_3(y) \\
 \Psi_{11}(x, y) &= H_3(x) \times H_4(y) & \Psi_{15}(x, y) &= H_1(x) \times H_4(y) \\
 \Psi_{12}(x, y) &= H_4(x) \times H_4(y) & \Psi_{16}(x, y) &= H_2(x) \times H_4(y)
 \end{aligned}$$

correspondem aos valores de

$$w, \quad \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.27)$$

nos nós dos cantos do elemento⁵. A identificação do significado físico de cada função de aproximação Ψ_i pode ser facilmente reconhecida na Figura A.2 do Anexo A.

O elemento criado por Bogner, Fox e Schmit – elemento BFS – baseia-se nesta formulação. Apesar de ser o elemento rectangular existente mais preciso, como indicam os resultados obtidos por Zienkiewicz [16], a sua aplicabilidade é bastante limitada. [16]

Zienkiewicz [16] faz uma comparação gráfica de alguns elementos conformes e não conformes. Apesar de garantirem todas as condições de compatibilidade, os elementos conformes são mais rígidos e verificam uma maior falta de precisão.

2.3.6 Elementos finitos para lajes espessas [11]

Na formulação de elementos para lajes de Reissner-Mindlin, os campos de deslocamentos têm de ser aproximados de forma independente.

A definição das aproximações pode ser expressa na forma:

⁵ Apesar de muitos autores se referirem a este grau de liberdade adicional, $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$, como a curvatura de torção, na verdade este não têm um significado físico real.

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^{n \text{ nós}} \psi_i(x, y) \times w_i \quad (2.28)$$

$$\theta_x(x, y) = \sum_{i=1}^{n \text{ nós}} \psi_i(x, y) \times (\theta_x)_i \quad (2.29)$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_{i=1}^{n \text{ nós}} \psi_i(x, y) \times (\theta_y)_i \quad (2.30)$$

onde n representa o numero de nós do elemento finito em causa.

Como se pode constatar, o desenvolvimento de elementos finitos é muito mais simples do que no caso dos elementos para lajes finas. Tal facto prende-se com a continuidade exigida. Note-se que para assegurar a continuidade dos deslocamentos transversais e das rotações, basta neste caso garantir a continuidade das funções de interpolação utilizadas.

Para elementos rectangulares, com lados paralelos ao sistema de eixos em causa, as funções de interpolação têm a seguinte forma:

$$\psi_1(x, y) = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{xy}{ab} \quad (2.31)$$

$$\psi_2(x) = \frac{x}{a} - \frac{xy}{ab} \quad (2.32)$$

$$\psi_3(x) = \frac{xy}{ab} \quad (2.33)$$

$$\psi_4(x) = \frac{y}{b} - \frac{xy}{ab} \quad (2.34)$$

O significado físico das funções de forma acima representadas encontra-se na Figura A.3 no Anexo A.

2.3.7 Elemento DKT (Discrete Kirchhoff Theory) [19] [20]

O elemento DKT, elemento de laje usado pelo programa de cálculo SAP2000, é obtido com recurso às teorias de Kirchhoff e Reissner-Mindlin.

O elemento DKT foi criado com o objectivo de conseguir um elemento baseado na teoria de Kirchhoff, que garantisse as condições de conformidade. Faz parte do grupo dos elementos finitos de placa de geometria triangular, sendo constituído por 9 graus de liberdade (deslocamento transversal w e as rotações θ_x e θ_y nos vértices). A sua formulação tem como ponto de partida o elemento triangular com nós nos vértices e no meio dos lados Figura 2.8 (a).

Para a obtenção deste elemento é adoptada inicialmente a teoria de Reissner-Mindlin, daí a necessidade de se obterem funções interpoladoras independentes para as rotações θ_x e θ_y . Após as deduções das expressões de energia de deformação e antes de se chegar à matriz de rigidez do elemento DKT, admite-se que a hipótese da teoria de Kirchhoff é aplicada discretamente ao longo dos lados do elemento. Assim, a energia resultante da deformação por esforço transversal é desprezáveis quando comparada com a energia de flexão. Consequentemente os graus de liberdade extras, localizados no meio dos lados, são eliminados degenerando no elemento da Figura 2.8 (b), com nove graus de liberdade.

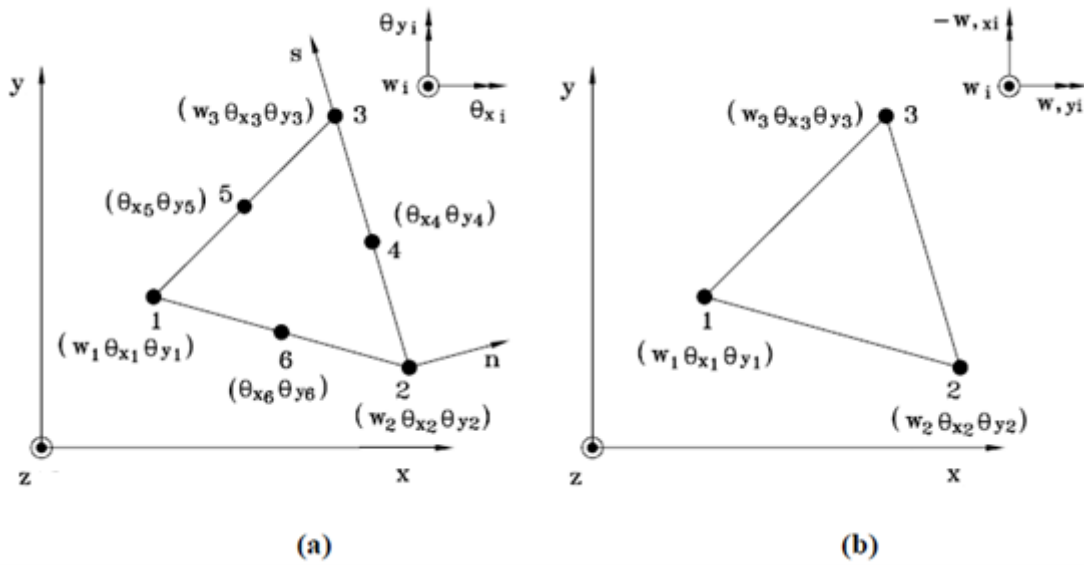


Figura 2.8 - Desenvolvimento do elemento DKT. (a) Fase inicial; (b) Fase Final [20]

Na formulação do elemento DKT, [19] adoptam-se as seguintes hipóteses:

1. Os campos de rotações $\theta_x(x,y)$ e $\theta_y(x,y)$ variam quadraticamente sobre o elemento

$$\theta_x = \sum_{i=1}^6 \psi_i \theta_{xi} \quad (2.35)$$

$$\theta_y = \sum_{i=1}^6 \psi_i \theta_{yi} \quad (2.36)$$

2. Imposição da hipótese de Kirchhoff nos:
 - a. nós dos vértices

$$\gamma = \begin{bmatrix} \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{nos nós } 1, 2 \text{ e } 3 \quad (2.37)$$

- b. nós a meio dos lados

$$\theta_{sk} + \frac{\partial w_k}{\partial s} = 0 \text{ com } k = 4, 5, 6 \quad (2.38)$$

(s representa a direcção tangente ao lado considerado, tal como é indicado na Figura 2.8 (a))

3. A variação do campo de deslocamentos transversais w ao longo dos lados é cúbica.
4. É imposta a variação linear do campo de rotação θ_n ao longo dos lados

$$\theta_{nk} = \frac{1}{2}(\theta_{ni} + \theta_{nj}) \text{ com } k = 4, 5, 6 \quad (2.39)$$

(sendo i e j os vértices do lado correspondente)

Reexaminado por mais de uma década, actualmente encontra-se entre os melhores elementos para análise de flexão em placas de sua classe. As funções de deslocamento do elemento são conformes, dessa forma, a continuidade de todas as variáveis essenciais ao longo dos lados do elemento e a convergência na solução de placas delgadas são garantidas. [21]

2.4 Analogia de Grelha

2.4.1 Considerações Iniciais

A substituição do pavimento por uma grelha foi inicialmente idealizada por Marcus em 1932, que não dispunha, nesta época, de computadores, sendo necessário valer-se de processos aproximados para resolver as lajes.

Com o grande desenvolvimento da informática, surgiram programas computacionais que calculam rapidamente os esforços em cada barra da grelha, simulando melhor o comportamento da estrutura. O método, pioneiro nos computadores através de Lightfoot e Sawko, representa a laje numa grelha de vigas equivalente. [22]

A analogia de grelha consiste em representar a laje através de uma série ortogonal de elementos de barra que simulam bandas de laje que se cruzam formando uma grelha sobre apoios (que representam os pilares), criando desse modo um modelo virtual equivalente à estrutura real do pavimento do edifício (Figura 2.9).

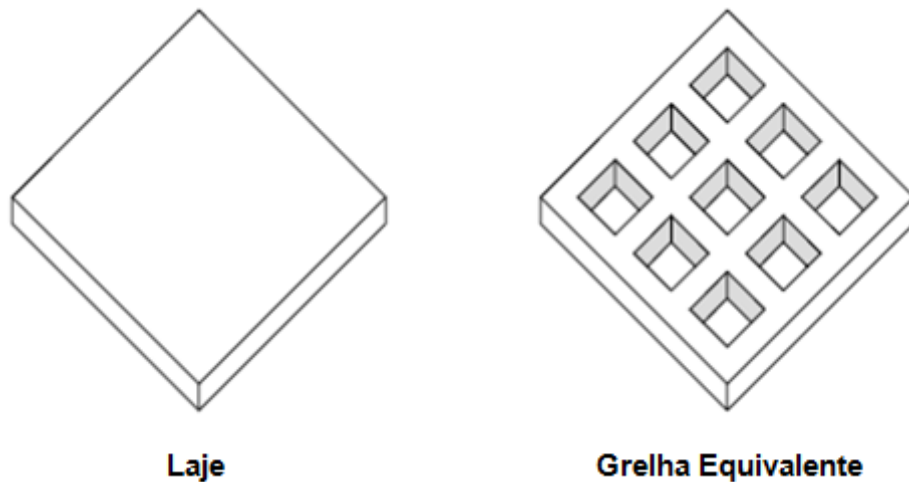


Figura 2.9 - Laje e grelha equivalente

As características físicas da laje, nomeadamente a rigidez de flexão e torção, dispersas ao longo do domínio da laje, são concentradas nos elementos de grelha mais próximos. Assim, a rigidez longitudinal da laje é concentrada nas vigas longitudinais, ao passo que a rigidez transversal é concentrada nas vigas transversais. O ideal seria a rigidez das vigas ser tal que, quando a laje e a respectiva grelha estivessem sujeitas a carregamentos idênticos, as duas estruturas flectissem de igual forma e os esforços em cada elemento de grelha igualassem os esforços na secção de laje que o elemento de grelha pretende simular. No entanto, devido às diferentes características da laje e da grelha equivalente, este ideal pode apenas ser aproximado.

As principais características que diferenciam a laje da respectiva grelha equivalente são:

1. o equilíbrio em qualquer elemento de laje necessita que o momento de torção seja idêntico nas direcções ortogonais ($m_{xy} = m_{yx}$) e a curvatura d^2w/d_xd_y a mesma em ambas as direcções. Na grelha equivalente não há princípio matemático ou físico que faça com que o momento de torção ou a curvatura idênticos nas direcções ortogonais num ponto. Contudo, se a malha da grelha é suficientemente fina (Figura 2.10 (a)), a grelha flecte numa suave superfície com curvatura na direcção ortogonal aproximadamente igual (como será o momento torsor se a rigidez de torção for a mesma nas duas direcções). Por outro lado se a malha é muito rara, a grelha não irá flectir numa superfície suave, portanto a flexão e a curvatura não serão idênticos nas direcções ortogonais (Figura 2.10 (b)).

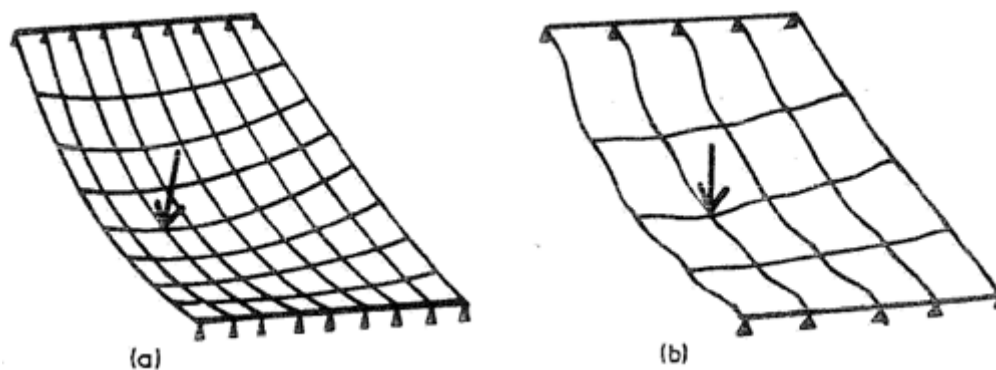


Figura 2.10 – Malhas com diferentes espaçamentos (Adaptado de [23])

2. na grelha equivalente, o momento em cada elemento de grelha é unicamente proporcional à curvatura do próprio elemento, enquanto na laje o momento em cada direcção depende da curvatura nessa direcção e na direcção ortogonal. Felizmente foi descoberto, através de inúmeras comparações de grelhas com outros métodos rigorosos, que os esforços de flexão calculados a partir de resultados de grelha para momentos distribuídos são suficientemente precisos para objectivos de projecto. [23]

2.4.2 Malha a adoptar para a grelha equivalente

Consequência da enorme variedade de formas de lajes e condições de apoio, torna-se difícil conceber regras para a escolha de uma malha para a grelha. No entanto vale a pena seguir algumas das recomendações propostas por Hambly [23]:

3. Os elementos de grelha devem localizar-se em posições pré-determinadas pelo projecto, tais como linhas de apoio, ao longo das vigas de extremidade, bem como de outras se existirem, que contenham acção específica.
4. Numa laje isótropa cada barra deve ter no máximo largura igual a $\frac{1}{4}$ do vão transversal ao seu eixo,

$$b_x \leq \frac{l_x}{4} ; b_y \leq \frac{l_y}{4} \quad (2.40)$$

onde b_x e b_y representam as larguras relativas às barras paralelas às direcções x e y respectivamente (Figura 2.13).

5. Quanto mais densa a malha, melhores serão os resultados obtidos. No entanto essa melhoria deixa de acontecer se a largura das barras for menor do que 2 ou 3 vezes a espessura da laje.
6. Deve-se colocar uma linha de barras no contorno livre da laje, cuja largura para o cálculo do momento de inércia a torção deve ser diminuída de $0.3h$, por

se tratar do ponto por onde passa a resultante das tensões de corte devidas à torção (Figura 2.11)

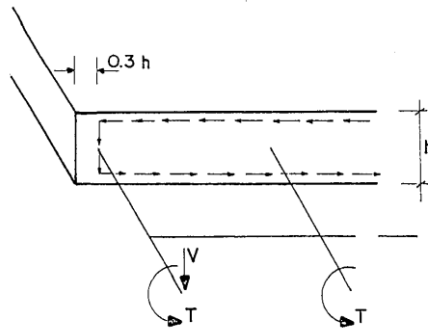


Figura 2.11 - Barra de extremidade (Adaptado de [23])

7. Nas regiões de grande concentração de esforços, tais como apoios ou cargas concentradas, recomenda-se dispor uma malha cuja largura das barras não seja superior a 3 ou 4 vezes a espessura da laje.

2.4.3 Características dos elementos de grelha

Cada elemento de grelha possui três graus de liberdade por nó: uma translação (direcção do eixo z) e duas rotações (em torno dos eixos x e y); que por sua vez, na aplicação de acções verticais, originam respectivamente os seguintes esforços internos: esforço transversal, momento flector e momento torsor (Figura 2.12).

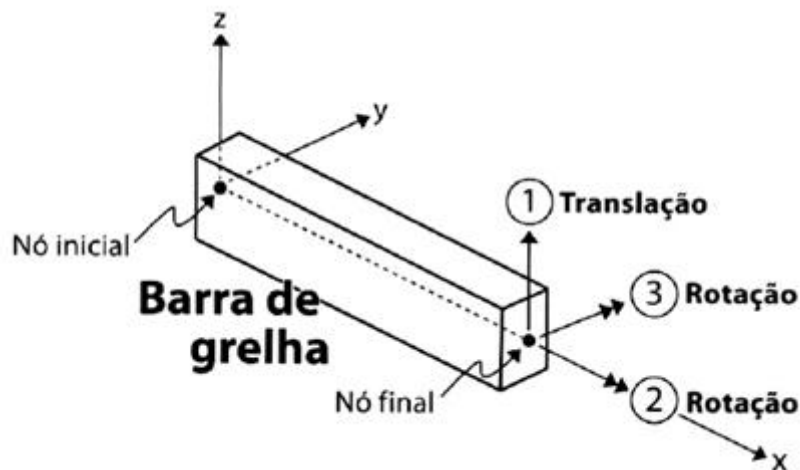


Figura 2.12 – Graus de liberdade de um elemento de grelha (Adaptado de [24])

Quando se definem os elementos de grelha que pretendem simular o comportamento da laje, é fundamental conferir-lhes rigidez de flexão e rigidez de torção. A escolha destas propriedades deve ser cuidada para que se represente, de forma o mais aproximada possível, o comportamento dos elementos estruturais que se visa moldar.

Segundo Castro [5], as propriedades destes elementos de grelha a considerar devem ser extraídas das relações de elasticidade das lajes de Kirchhoff. Assim, vem:

$$\begin{bmatrix} m_x(x, y) \\ m_y(x, y) \\ m_{xy}(x, y) \end{bmatrix} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_{xx}(x, y) \\ \chi_{yy}(x, y) \\ 2\chi_{xy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

2.4.3.1 Rigidez de flexão – EI [5]

O momento de inércia longitudinal e transversal dos elementos de grelha é determinado considerando que cada elemento representa uma largura b de laje (Figura 2.13), de valor igual à distância entre os centros dos vãos adjacentes à barra.

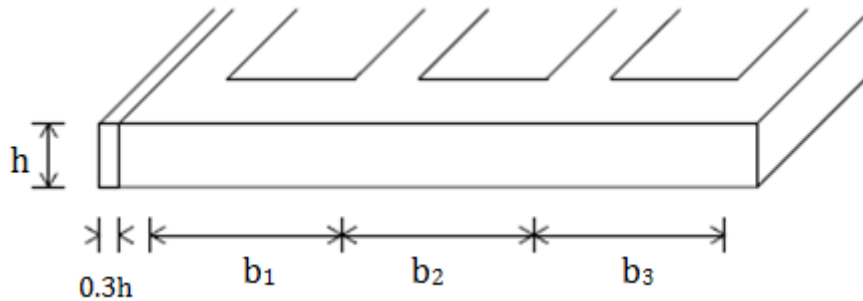


Figura 2.13 - Largura b do elemento de grelha (Adaptado de [23])

Com base em (2.41), para se estimar o valor de rigidez de flexão do elemento, orientado segundo x , considera-se que a laje está sujeita a um estado de flexão cilíndrica dado por (2.42),

$$\chi_x \neq 0 \quad e \quad \chi_{xy} = \chi_y = 0 \quad (2.42)$$

a relação momento/curvatura pode ser escrita da seguinte forma:

$$m_x = E \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \chi_x \quad (2.43)$$

Verifica-se que ao introduzir a relação de elasticidade (2.44), relativa às vigas, na relação anterior,

$$M = EI\chi \quad (2.44)$$

obtém-se a inércia equivalente, I_{eq} , por unidade de largura. Para obter a I_{eq} relativa a um elemento de largura diferente, bastará multiplicar por b . Assim vem:

$$I_{eq} = \frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \times b \quad (2.45)$$

Importa agora realçar que a rigidez de flexão a considerar para elemento de grelha, correspondente a uma faixa de laje de largura b (vulgarmente designada por banda de laje) é diferente, embora semelhante, à rigidez de uma peça linear, uma viga, com as mesmas dimensões (2.46).

$$I_{viga} = \frac{h^3}{12} \times b \quad (2.46)$$

Nos elementos baseados em teorias em que se despreza a deformação por corte, teoria de Euler-Bernoulli e teoria de Kirchhoff, é comum a ideia de que as secções se mantêm planas e ortogonais ao eixo da peça linear. Assim, para uma dada secção e para um momento flector positivo, a deformação das fibras longitudinais na face superior é $-\Delta l$ e nas fibras da face inferiores Δl . (Figura 2.14 (a)). Por efeito de Poisson, conseqüentemente, derivam deformações na secção transversal da viga (Figura 2.14 (b)). [25]

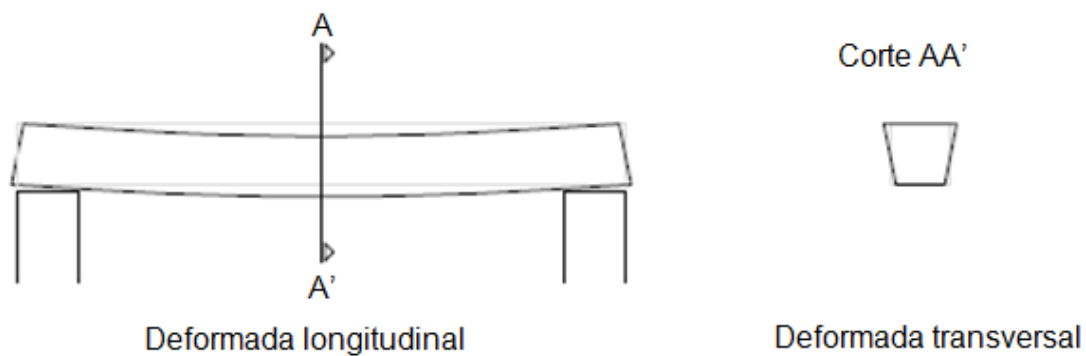


Figura 2.14 - Deformada da secção da uma viga

Caso não haja impedimento da peça se deformar, não se desenvolvem tracções, como por exemplo o caso da viga isolada, onde resulta uma rigidez de inércia dada por (2.46). No entanto, no caso de vigas encostadas, existe restrição da deformação, gerando-se esforços, tensões de tracção, resultando numa rigidez de inércia de valor acrescido, $1/(1-\nu^2)$ vezes. [4]

No entanto, segundo Hambly, este factor de incremento de rigidez na banda de laje é geralmente ignorado na análise de grelha, porque tanto a rigidez longitudinal como a transversal são afectadas pela quantidade, não alterando a distribuição de rigidez.

2.4.3.2 Rigidez de Torção – GJ [23]

Para uma peça linear submetida a torção constante, o momento torsor, segundo a direcção x , é dado pela seguinte expressão:

$$T = GJ \frac{\partial \phi'}{\partial x} \quad (2.47)$$

em que,

J – constante de torção

ϕ' – rotação da peça

G – módulo de corte, dado por:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.48)$$

Ao contrário da inércia da viga na rigidez de flexão, que é perfeitamente definida através da expressão (2.46), a constante de torção J , vulgarmente conhecida por constante de torção de Saint Venant, não partilha da mesma simplicidade. Sem nenhum algoritmo que permita determinar o seu valor, existem apenas algumas regras que servem de orientação para as peças mais regulares e comuns:

- Para uma barra de grelha que representa uma largura b de uma laje isotrópica, tem-se:

$$J = \frac{bh^3}{6} \quad (2.49)$$

Existem muitas outras orientações que varrem grande parte das secções de vigas utilizadas na Engenharia Civil, contudo não serão abordadas nesta dissertação. Estas podem ser encontradas em Hambly [23].

Contudo, à semelhança do que acontece em 2.4.3.1, Leitão [4] sugere outra abordagem para a obtenção da constante de torção.

Considerando uma laje sujeita ao estado de deformação caracterizado por,

$$\chi_{xy} \neq 0 \quad e \quad \chi_x = \chi_y = 0 \quad (2.50)$$

se nas relações de elasticidade (4.2), se deduzir a definição de módulo de corte G , observa-se que o campo de momentos torsores é dado pela expressão:

$$m_{xy} = E \frac{h^3}{12(1 - \nu^2)} \chi_{xy} = G \frac{h^3}{6} \chi_{xy} \quad (2.51)$$

Comparando as expressões (2.47) e (2.51), relativas ao momento torsor em elementos de viga e elementos de laje respectivamente, obtêm-se facilmente a constante de torção para uma banda de laje unitária. Se a esta multiplicarmos por b , obtemos a constante de torção para uma banda de laje de comprimento b (2.52).

$$J_{eq} = \frac{h^3}{6} \times b \quad (2.52)$$

“Sublinhe-se desde já que uma vez que a consideração directa do efeito do momento torsor dificulta a tarefa de dimensionamento das lajes, é frequente que nas grelhas se despreze

o valor da rigidez de torção assumindo então que $GJ=0$. Esta opção faz com que o carregamento seja equilibrado apenas com recurso a distribuições de momentos flectores.” [5]

Consequentemente, o modelo é mais flexível, o que leva à obtenção de maiores deslocamentos verticais do que os que realmente se verificam. [26]

O último reparo é para as equações (2.46) e (2.52). Note-se que, para um elemento de grelha, a constante de torção é o dobro da inércia de flexão,

$$J_{eq} = 2I_{eq} \quad (2.53)$$

Contudo, importa salientar que esta afirmação não significa que o valor da rigidez de torção seja o dobro do valor da rigidez de flexão, uma vez que a primeira depende de G e a segunda de E , que são sempre valores diferentes (2.48).

Esta verificação (2.53), acaba por ser frequentemente assumida aquando da utilização da analogia grelha na análise elástica de lajes.

2.4.4 Carregamento da grelha [5]

Como já foi referido, uma das principais características do elemento laje é estar sujeito apenas a carregamentos verticais, ou seja, perpendiculares ao plano médio da laje. Assim as cargas actuantes podem ser representadas de várias formas. Poder-se-ia aplicar em cada elemento de grelha um carregamento linear triangular / trapezoidal (Figura 2.15 (a)), correspondente ao encaminhamento de cargas das lajes para as vigas, ou um carregamento pontual em cada nó da grelha associado à área de influência do mesmo (Figura 2.15 (b)), contudo o volume de cálculo seria bastante elevado pelo que se desprezaram estas alternativas.

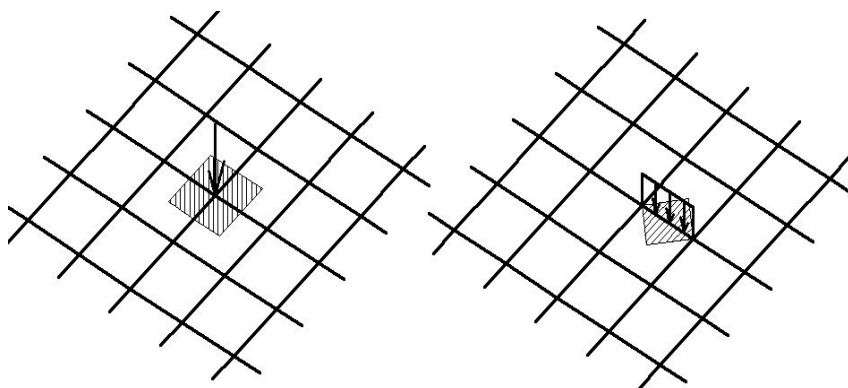


Figura 2.15 - Tipos de carregamento nos elementos de grelha (Adaptado de [24])

Tendo em conta as simplificações até aqui já consideradas, consente-se alguma ligeireza na determinação da distribuição de cargas pelos elementos de grelha. [5] Assim, considera-se uma metodologia mais simples, mas em que o equilíbrio está garantido. Utilizam-se carregamentos lineares contínuos nos elementos, afectados de um coeficiente de repartição α que, por norma, varia consoante a geometria da laje. No entanto, devido à regularidade em planta da laje, considerou-se aceitável usar um coeficiente de repartição $\alpha=0,5$ ao longo de toda a laje.

2.4.5 Análise da solução [5]

Não esquecendo que o objectivo desta metodologia se centra na análise de lajes importa agora fazer corresponder os valores da solução obtida, referente a elementos lineares (grelha de elementos), à laje que se pretende analisar, ou seja, converter os resultados obtidos a elementos de área.

Neste âmbito importa comparar os esforços gerados em elementos de laje (área) e os mesmos gerados em elementos lineares, elementos de viga. Como é possível constatar da observação da Figura 2.16, os momentos m_x , m_{xy} e o esforço transversal v_x , do elemento de laje estão directamente associados aos momentos T_x , M_x e o esforço transversal v_x , do elemento de grelha. Adverte-se apenas para o sentido do momento torsor, de acordo com a convenção ilustrada na Figura 2.16, que é a mais comum entre os autores, m_{xy} e T têm sentidos opostos.

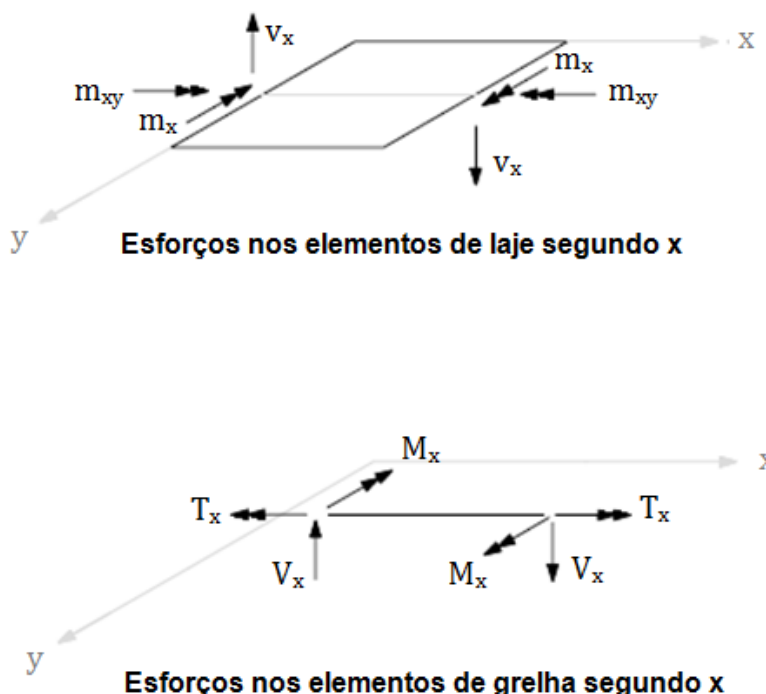


Figura 2.16 - Campos de esforços nas lajes e grelhas (Adaptado de [5])

Apesar de se ter verificado que os esforços estão directamente associados, é importante ter presente que elementos de laje tratam grandezas bidimensionais e elementos lineares grandezas lineares, unidimensionais portanto. Assim, para se poder comparar os esforços em ambos os modelos é necessário transformar os esforços obtidos num elemento de grelha. Para tal basta dividir estes pela largura do elemento de grelha (2.54).

$$m_x = \frac{M_x}{b} ; m_{xy} = \frac{T_x}{b} ; v_x = \frac{V_x}{b} \quad (2.54)$$

A informação anterior é toda relativa à direcção x. Para evitar redundância de informação, deixa-se apenas a nota de que para a direcção y o procedimento é análogo, com a excepção dos momentos torsores, m_{yx} e T_y , que têm o mesmo sentido.

Por fim, é importante reforçar três ideias relativas a este método. Primeiro, se a solução de esforços resultante equilibra o carregamento aplicado à laje. Então pode-se afirmar que a solução obtida está do lado da segurança. Em segundo lugar importa deixar claro que por muito que se refine a malha, para aumentar a qualidade da solução, os dois métodos de análise de pavimentos são bastante distintos, assim *“nunca se conseguirá com recurso a modelação com elementos unidimensionais reproduzir de forma exacta o comportamento de uma estrutura bidimensional”* [5]. Por fim, admite-se que, embora a modelação de uma laje com elementos de grelha permita apenas a obtenção de uma solução aproximada, esta é válida, uma vez que os resultados obtidos estão do lado da segurança.

Em suma, pretende-se com o método da Analogia em Grelha obter uma solução aproximada, caracterizada pela sua simplicidade e segurança, que permita uma análise eficiente da estrutura.

3 Caso de estudo

3.1 Considerações Iniciais

A modelação do edifício analisado no âmbito deste trabalho foi concebida de raiz, isto é, fundação, pilares, paredes, vigas (exteriores e interiores) e o pavimento. No contexto desta dissertação, será dada maior relevo à forma como foi tratado o pavimento, abordando as restantes peças da estrutura de forma ligeira.

Começa-se por descrever a estrutura, primeiro a sua forma acompanhada dos respectivos desenhos de arquitectura e posteriormente os materiais e as peças estruturais e não estruturais.

De seguida é dada atenção à modelação de toda a estrutura no programa de cálculo automático SAP2000.

3.2 Descrição da Estrutura

3.2.1 Aspectos Gerais

Pretende-se modelar um edifício em betão armado que apresenta a seguinte configuração (Figura 3.1 e Figura 3.2):⁶

- O edifício em questão destina-se à habitação. É composto por 4 pisos elevados e uma cave, possuindo um telhado com duas águas.
- No seu conjunto, o edifício tem uma área de implantação regular, formando um rectângulo com uma área de implantação de $240,50\text{m}^2$ ($18,50\text{m} \times 13,00\text{m}$). A altura total do edifício (contada entre a cota do piso 0 e a cota da face superior da laje de cobertura) é de 11,2m.
- Para os pisos elevados a planta de arquitectura prevê um pé direito de 2,8 metros em toda a sua extensão. Quanto à cave, o pé-direito previsto é de 2,5 metros.

⁶ As plantas do projecto encontram-se no Anexo B.

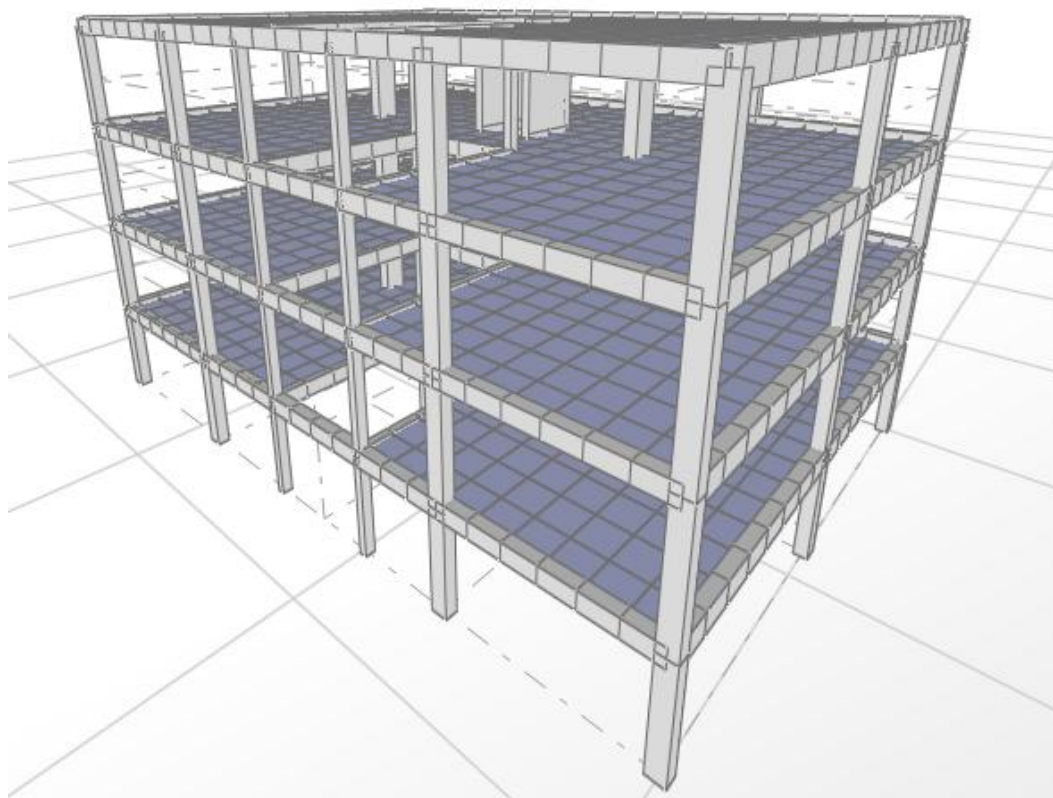


Figura 3.1 – Vista noroeste da estrutura do edifício

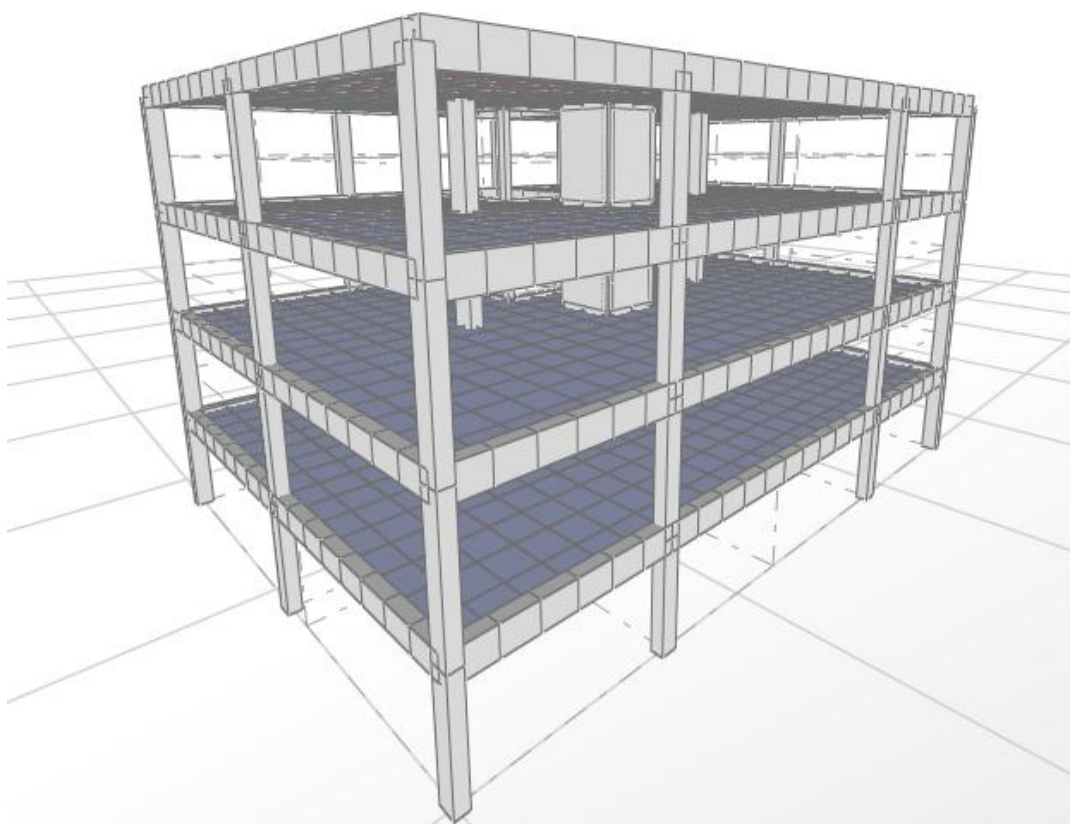


Figura 3.2 – Vista sudoeste da estrutura do edifício

3.2.2 Elementos estruturais

A estrutura apresenta o seguinte conjunto de elementos em betão armado (Figura 3.3):

Tabela 3.1 – Dimensões das paredes no núcleo de elevador

<i>Paredes resistentes</i>	Núcleo X	Núcleo Y
Dimensões [m]	0,23x1,70	1,76x0,23

Tabela 3.2 – Dimensões dos pilares

<i>Pilares</i>	P₁	P₂	P₃	P₄
Dimensões [m]	0,30x0,40	0,40x0,30	0,35x0,65	0,20x0,25

Tabela 3.3 – Dimensões das vigas estruturais (ou vigas de bordadura)

<i>Vigas</i>	V₁	V₂	V₃	V₄
Dimensões [m]	0,50x0,30	0,60x0,30	0,40x0,30	0,40x0,27

Tabela 3.4 – Espessura das lajes de pavimento

<i>Laje de pavimento</i>	Piso 1	Piso 2	Piso 3	Piso 4
Espessura [m]	0,27	0,27	0,27	0,27

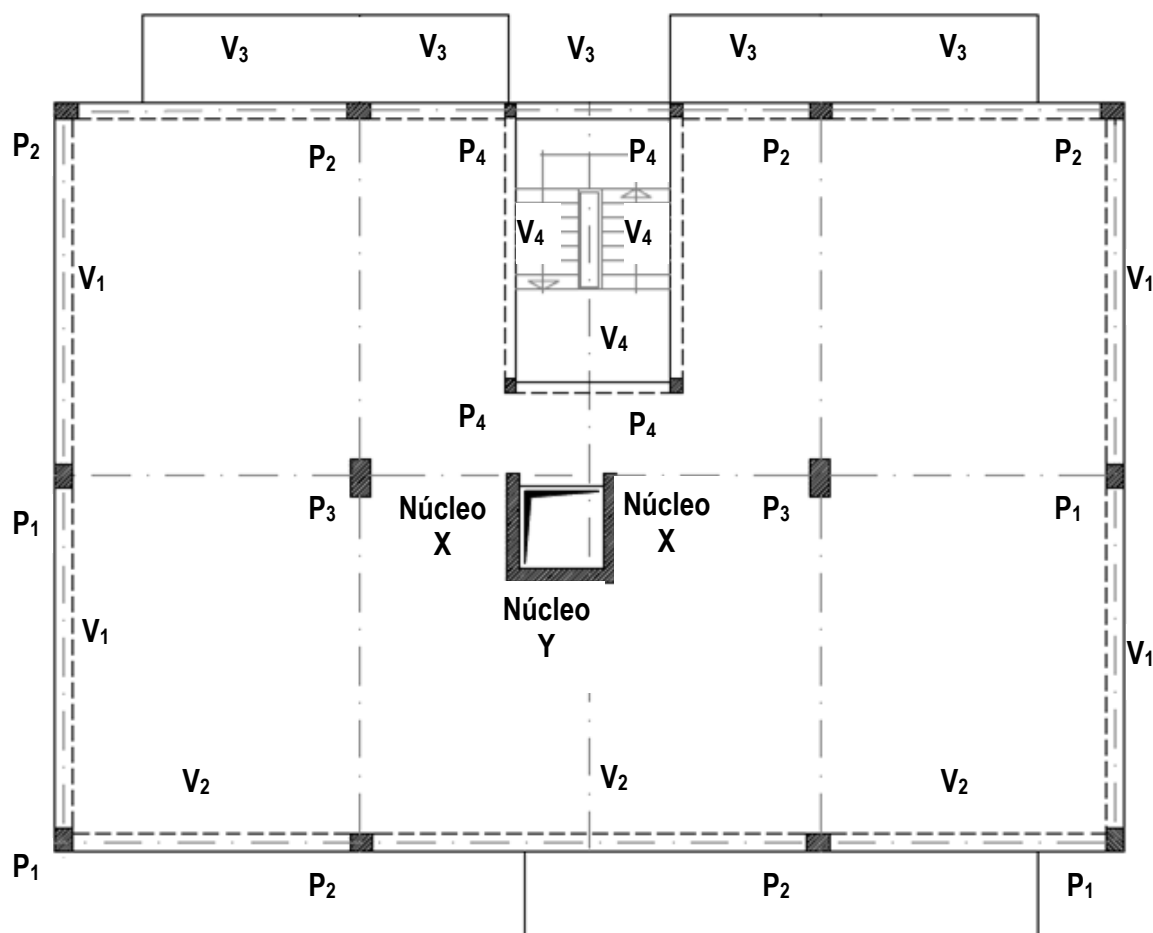


Figura 3.3 – Planta da laje

3.3 Acções consideradas

As acções distinguem-se em função da variação temporal e espacial. Dentro destas divisões podem ainda ser subdivididas em acções permanentes e acções variáveis. As acções permanentes são acções que não variam no tempo, durante o período de vida útil da estrutura, nem da sua localização espacial. Por sua vez, as acções variáveis assumem valores com variações significativas ao longo do período de vida útil da estrutura e caracterizam-se por uma localização livre.

Como acções permanentes sobre o piso, considerou-se o peso próprio, o revestimento do piso e as paredes (Tabela 3.5).

Tabela 3.5 – Acções permanentes sobre o piso

<i>Acções permanentes</i>	Carga
Paredes interiores	1,84 kN/m²
Revestimento do piso	1,5 kN/m²

Sobre as vigas de bordadura considerou-se a resultante da força exercida pelas paredes exteriores (Tabela 3.6).

Tabela 3.6 – Acções permanentes sobre as vigas de bordadura

<i>Acções permanentes</i>	V₁	V₂	V₃	V₄
Paredes exteriores⁷ [KN/m]	5,28	5,04⁸	5,28	5,28

Para a determinação do peso próprio de cada elemento, o programa de cálculo, já tem todos os dados que necessita, uma vez que os materiais constituintes dos elementos já foram definidos, passando-se o mesmo com as secções transversais.

No contexto desta dissertação apenas consta a análise da laje de pavimento. Como tal, a única acção variável considerada foi a sobrecarga (desprezando-se deste modo a influência de acções variáveis como a acção do vento e neve).

Como já foi referido anteriormente, o edifício em questão destina-se à habitação. Assim, segundo o artigo 35º do RSA [27] a sobrecarga a utilizar é de 2,0 KN/m². Os coeficientes a utilizar para a obtenção dos valores reduzidos a considerar para este tipo de sobrecarga são:

$$\psi_0 = 0,4; \psi_1 = 0,3; \psi_2 = 0,2 \quad (5.3)$$

A verificação da segurança da estrutura deve ser realizada em relação aos estados limites, comparando com esses estados limites os estados a que a estrutura fica sujeita à actuação das acções, convenientemente combinadas, sendo estes estados limites, os estados para além dos quais a estrutura não satisfaz os requerimentos funcionais para os quais foi concebida.

Na verificação da segurança foram adoptadas as combinações de acções que estão estipuladas no RSA [27], no Art. 9º, Art.10º e Art. 12º.

⁷ Considerou-se que as paredes descarregam directamente sobre as vigas de bordadura como carga de face.

⁸ A viga de bordadura V₂ tem menor sobrecarga devido à sua maior dimensão em altura, consequentemente a parede exterior será menor que em outros alçados da estrutura.

3.4 Modelação

Após a fase de pré-dimensionamento e antes de passar à fase do dimensionamento das peças estruturais do edifício em questão, é necessário fazer-se uma análise estrutural do edifício. Actualmente, é possível recorrer a programas de cálculo automático, neste caso o SAP2000.

Apresentada a estrutura, segue-se a modelação da mesma, que vai assegurar a passagem da informação estrutural até aqui considerada para o programa de cálculo automático. A primeira etapa da modelação é a criação de conjunto de linhas de referência que vão auxiliar a inserção dos elementos de estrutura. Após a definição da grelha tridimensional da estrutura, segue-se a definição das características do material e a definição das secções dos elementos estruturais, pilares e vigas, bem como das cargas aplicadas.

Os subcapítulos seguintes são dedicados à geração do modelo de elementos finitos e do modelo de grelha da estrutura.

Um aspecto importante na modelação, e que é comum a todos os elementos finitos, é a orientação relativa dos mesmos. Estes devem ser todos lançados no mesmo plano como devem também ter a mesma orientação dos eixos locais.

3.4.1 Criação da grelha tridimensional

Tendo como base as plantas e cortes provenientes da arquitectura (Anexo B) sobre os quais foram definidos os diferentes alinhamentos de elementos estruturais (ver alinhamentos A, B, C, D, E, 1, 2 e 3 na Figura B.4), foi criada uma grelha tridimensional que serviu de auxiliar para a inserção no SAP2000 dos elementos constituintes da estrutura do edifício.

De forma a facilitar a conexão de elementos verticais com elementos horizontais, é usual traçar a malha⁹ consoante a disposição destes. Contudo, neste caso prático, procedeu-se de forma oposta. Foi sugerida uma malha regular, usando elementos quadrados (0,8mx0,8m), o que obrigou a uma adaptação da posição das peças verticais, no entanto, tendo em conta que o pretendido é a comparação de 2 modelos idênticos e não a obtenção de esforços exactos da verdadeira estrutura, este procedimento considera-se irrelevante. (Figura 3.4)

⁹ Note-se que grelha e malha são relativas ao mesmo conjunto de linhas imaginárias mas não têm o mesmo significado. A malha é a base da grelha tridimensional mas sem altura, de outro ponto de vista, é o plano que dá origem à grelha tridimensional após serem inseridas as cotas.

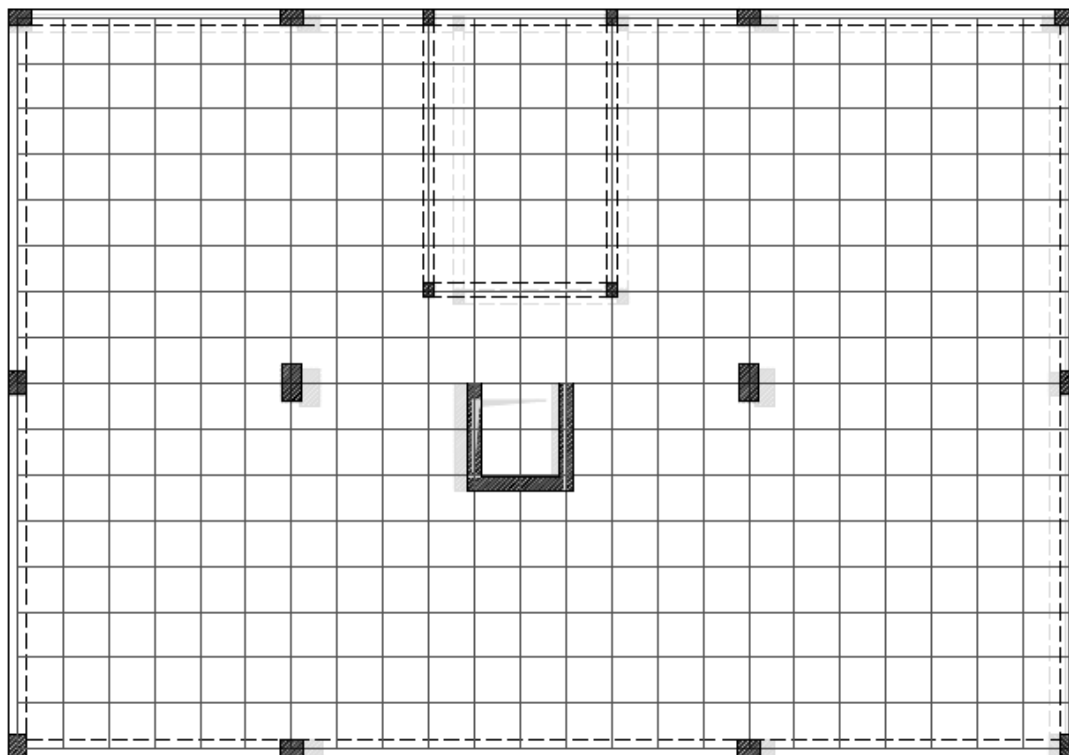


Figura 3.4 – Ajuste da posição das peças verticais à grelha de 0,8mx0,8m

Assim, de forma global, a malha até aqui definida caracteriza-se por ser constituída por quadrados de 0,8m de lado, que se estende ao longo de 18,4m segundo a direcção X e 13,6m na direcção Y. Para dar origem à grelha tridimensional, confere-se a altura correspondente aos respectivos pisos, até perfazer a altura total de 11,2m.

3.4.2 Definição do material

O edifício analisado é composto exclusivamente por elementos de betão armado, pelo que foi necessário definir apenas um material – betão da classe C25/30 – o qual foi usado para todos os elementos estruturais.

O programa de cálculo utilizado, SAP2000, é um programa bastante dedicado à área da engenharia civil, pelo que para materiais como betão e aço já vêm com algumas das suas propriedades predefinidas, como é o caso do coeficiente de distorção G . Assim na inserção do material definido, bastou introduzir os seguintes valores:

- a) Peso volúmico: de acordo com o Artº 14 do RSA [27] o peso volúmico do betão armado é de 25KN/m³;
- b) Módulo de Elasticidade E : para um betão da classe C25/30, E é igual a 31,0 GPa aos 28 dias, conforme se pode constatar por observação da Tabela 3.1, do ponto 3.1.3 do EC2 [28], parte 1.1.

- c) Coeficiente de Poisson: ainda de acordo com o ponto 3.1.3 (4) do EC2 [28] admitiu-se um coeficiente de Poisson com o valor de 0,2.

3.4.3 Modelação de vigas, pilares e núcleo

Após a criação de elementos de barra com características que simulam as peças estruturais em causa, passou-se à inserção dos mesmos na grelha tridimensional.

A inserção dos pilares e vigas foi de relativa simplicidade. Para tal bastou seleccionar peça a peça, e indicar qual a localização exacta dos seus pontos iniciais e finais na grelha tridimensional.

Após a representação das vigas de bordadura estas foram sujeitas à carga de faca, uniformemente distribuída sob o eixo da respectiva viga (Tabela 3.6).

Já a modelação do núcleo central foi um pouco mais complexa. Foram criados elementos de barra cujas características foram obtidas de cada parede do núcleo, o NUCLEO X com uma relação de profundidade/comprimento de 1,76m/0,23m respectivamente, e o NUCLEO Y com uma relação de profundidade/comprimento de 0,23m/1,76m respectivamente.¹⁰ A compatibilização de deslocamentos, de forma a simular o comportamento tridimensional da peça original, foi feita com a utilização de vigas de rigidez (elementos BR) que garantem a compatibilização dos deslocamentos (de flexão, torção e translação) com os elementos adjacentes (Figura 3.5). Para assegurar estas características, definiu-se este elemento com um material novo, designado por BR, semelhante ao já descrito, material C25/30, mas com um módulo de elasticidade mil vezes superior.

¹⁰ Note-se que estas dimensões são medidas à linha média das secções originais.

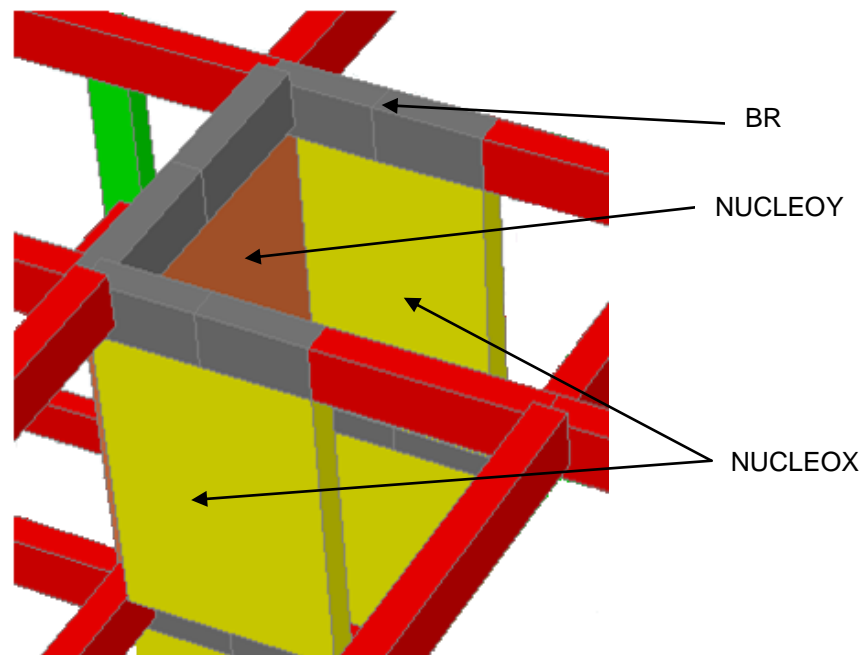


Figura 3.5 – Representação da modelação do núcleo de elevador no SAP2000

3.4.4 Modelação das fundações

Para modelar as fundações utilizou-se uma expressão que simula a rigidez de rotação conferida pelo solo a uma sapata rectangular.

As rigidezes de rotação das sapatas são então simuladas através de apoios elásticos que procuram, no modelo, traduzir esta mesma deformabilidade. Em cada elemento, cria-se então uma mola, no nó inferior do elemento, o qual corresponde ao centro geométrico da sapata.

Para as translações, considera-se que o solo tem capacidade de absorver, sem se deformar, todos os esforços oriundos dos elementos.

Finalmente liberta-se a rotação em torno do eixo vertical para que não se gerem esforços de torção na fundação.

Para o núcleo central, uma vez que este é composto por 3 elementos de parede, foi necessário criar condições para que estes se comportem como se só de um corpo rígido se tratassem. Para este efeito, cria-se um nó no centro geométrico da sapata, o qual é ligado aos centros de massa de cada parede do núcleo através do elemento de barra, BR (Figura 3.6).

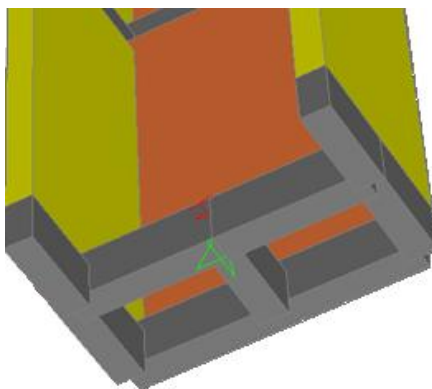


Figura 3.6 – Ligação do nó da fundação ao núcleo central sapata

3.4.5 Modelação da laje de pavimento com elementos de grelha

A primeira tarefa na modelação da laje de pavimento com elementos de grelhas foi a grelha a adoptar. Adoptou-se uma malha quadrada regular, $0,8\text{m} \times 0,8\text{m}$.

A próxima tarefa centrou-se na criação dos elementos de grelha que constituiriam a malha. Assim, foi criado um elemento de barra com secção de $0,27\text{m} \times 0,8\text{m}$ e com as mesmas características definidas para os elementos estruturais já referidos, de forma a simular a banda de laje correspondente.

Para gerar a malha reticulada em causa, foi necessário varrer a área de toda laje com este elemento de grelha nas duas direcções. Como tal, em qualquer área da laje do pavimento tinha-se um elemento de barra segundo x e outro segundo y sobrepostos (Figura 3.7). No entanto, neste programe de cálculo, a acção do peso próprio é assumida automaticamente, pelo que foi necessário reduzir a massa a metade de cada elemento de grelha, para, no fim, ter a mesma massa em ambos os modelos.

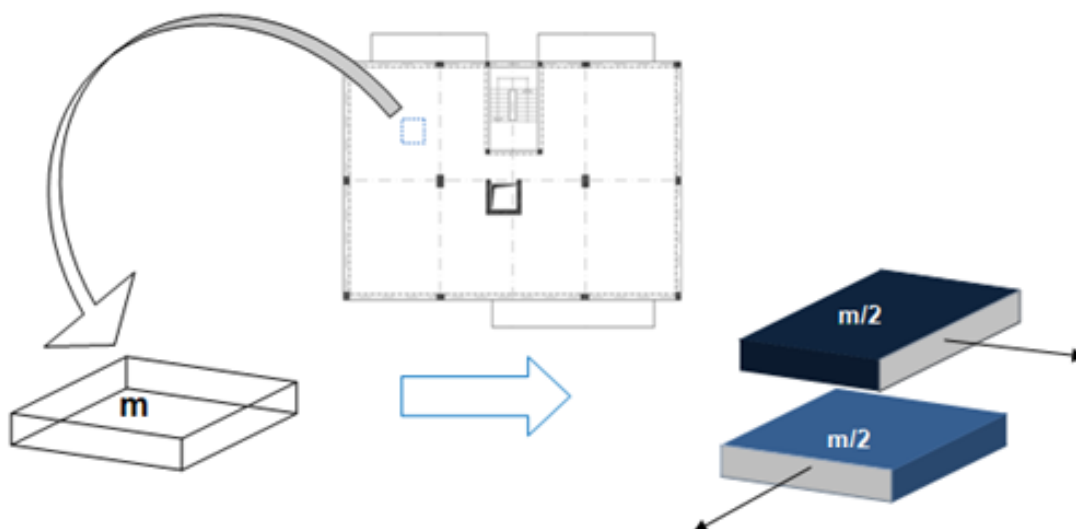


Figura 3.7 – Passagem de uma área da laje aos respectivos elementos de grelha

Uma das vantagens de usar a grelha tridimensional é que os elementos ao se cruzarem numa linha da grelha tridimensional, ficam de imediato compatibilizados. Assim, se a grelha tridimensional estiver correctamente concebida e os elementos estruturais colocados com precisão, a estrutura fica logo á partida compatibilizada, evitando trabalhos adicionais.

Após a criação da grelha de elementos, para que o modelo simulasse o comportamento da laje, foi necessário introduzir os carregamentos correspondentes. Cada acção foi modelada como uma carga linear contínua ao longo do elemento, afectados do coeficiente de repartição ($\alpha=0,5$).

3.4.6 Modelação laje de pavimento com elementos de laje

As lajes dos pisos para o edifício em questão foram modeladas através de elementos de laje com a espessura determinada na fase de pré-dimensionamento. Um elemento finito de laje apresenta comportamento de elementos de placa que se traduz pela existência de esforços no seu próprio plano, e um comportamento de laje, o qual se evidencia pela presença de esforços perpendiculares ao plano. No elemento de laje usado pelo SAP2000 ambos os efeitos estão desacoplados. [29]

Por outro lado os elementos de laje podem ainda, como opção, considerar ou não a deformação por corte. Convém referir que as deformações por corte começam a ser importantes para espessuras na ordem de 1/10, 1/5 do vão ou para zonas próximas de concentrações de tensão de flexão, como sejam apoios pontuais, aberturas ou reentrâncias. [30] Assim o programa de cálculo SAP2000 dá a escolher dois elementos de laje:

- Laje fina – baseado na teoria das Lajes de Kirchhoff, não considera os efeitos da deformação por corte. Anulando desde logo as parcelas relacionadas à deformação de corte do elemento DKT.
- Laje espessa – baseado na teoria das Lajes de Reissner-Mindlin, considera os efeitos da deformação por corte.¹¹

Assim, para a modelação da laje de pavimento com elementos de laje, começou-se por criar um elemento de área. Apesar da relação vão/espessura, neste caso, ser na ordem de 1/20, optou-se por usar um elemento laje espessa pelas razões atrás referidas. Por fim, introduziu-se a altura proveniente do pré-dimensionamento – 0,27m – e as características do material (3.4.2).

De seguida, espalharam-se os elementos definidos pela área de laje a simular, tendo em atenção a obtenção de uma malha de elementos regular (idêntica à obtida na modelação da

¹¹ No entanto se o utilizador reduzir a espessura da peça ao ponto de a parcela relativa à deformação por corte se tornar desprezável, o programa de cálculo já possui as ferramentas para evitar o fenómeno do travamento, recuperando a solução obtida pelo elemento de laje fina.

laje com elementos de grelha), a orientação dos eixos locais e os encontros dos elementos de laje com os elementos de barra, para a compatibilização de deslocamentos.

Por fim introduziu-se o carregamento. Após se definirem as acções, a sua implementação foi relativamente simples. Cada acção foi modelada como carga uniformemente distribuída ao longo da área de cada elemento.

4 Análise e interpretação de resultados

4.1 Considerações Iniciais

Até ao momento foram apresentados alguns conceitos importantes a saber para se estar em condições de fazer uma análise rigorosa dos resultados obtidos. Inicia-se agora o capítulo que deu origem ao tema desta dissertação. Assim, vão comparar-se, nas várias análises, os resultados obtidos no modelo de elementos de grelha e no modelo de elementos de laje.

Apresentado o caso de estudo que irá fornecer os dados relativos ao estudo que se pretende fazer, procede-se à análise de resultados.

Neste capítulo começa-se por fazer uma breve análise da rigidez lateral da estrutura de forma a perceber como os dois modelos influenciam o comportamento da estrutura.

De seguida passa-se à análise da estrutura em planta. Definem-se três alinhamentos de pontos que serão visados e procede-se à análise dos deslocamentos. Após este, segue-se a análise de esforços nos mesmos alinhamentos.

4.2 Análise da rigidez lateral da estrutura

De forma a transmitir, desde já, uma ideia do comportamento dos dois¹² modelos, vão analisar-se as frequências e os períodos para cada modo de vibração. Com isto pretende-se averiguar se o facto de se analisar a mesma estrutura com modelos diferentes altera rigidez lateral da estrutura.

Assim organizaram-se os valores das frequências e períodos de cada modo de vibração na seguinte tabela (Tabela 4.1):

A análise estendeu-se apenas até 10º modo de vibração por este ser o primeiro modo a envolver uma reduzida percentagem modal.

Para facilitar a compreensão de cada modo de vibração encontra-se no anexo C imagens relativas ao seu comportamento de vibração.

¹² Na verdade são analisados três modelos uma vez que o modelo de grelha se divide em dois modelos, um que considera a rigidez de torção e outro que a despreza ($J=0$).

Tabela 4.1 – Tabelas dos períodos e frequências dos modelos usados

	E. Laje		E. Grelha		E. Grelha (J=0)	
	<i>Período</i>	<i>Frequência</i>	<i>Período</i>	<i>Frequência</i>	<i>Período</i>	<i>Frequência</i>
	[seg.]	[ciclo/seg.]	[seg.]	[ciclo/seg.]	[seg.]	[ciclo/seg.]
1º Modo	0,600	1,666	0,604	1,656	0,635	1,574
2º Modo	0,518	1,929	0,514	1,947	0,548	1,825
3º Modo	0,507	1,971	0,507	1,973	0,540	1,853
4º Modo	0,199	5,030	0,198	5,054	0,206	4,860
5º Modo	0,145	6,910	0,142	7,021	0,146	6,869
6º Modo	0,132	7,557	0,131	7,616	0,136	7,378
7º Modo	0,120	8,300	0,118	8,463	0,121	8,278
8º Modo	0,093	10,800	0,090	11,145	0,094	10,605
9º Modo	0,083	12,023	0,082	12,204	0,090	11,074
10º Modo	0,082	12,265	0,081	12,299	0,089	11,220

Da observação da tabela verifica-se que as maiores frequências correspondem ao modelo de elementos de grelha (células preenchidas a cinzento), ou seja, é o modelo que confere maior rigidez lateral à estrutura, embora a rigidez lateral obtida pelo modelo com elementos de laje não seja tão díspar. O modelo de elementos de grelha com torção nula é claramente o modelo mais flexível, atribuindo por isso menores frequências à estrutura, como se pode constatar no Gráfico 4.1.

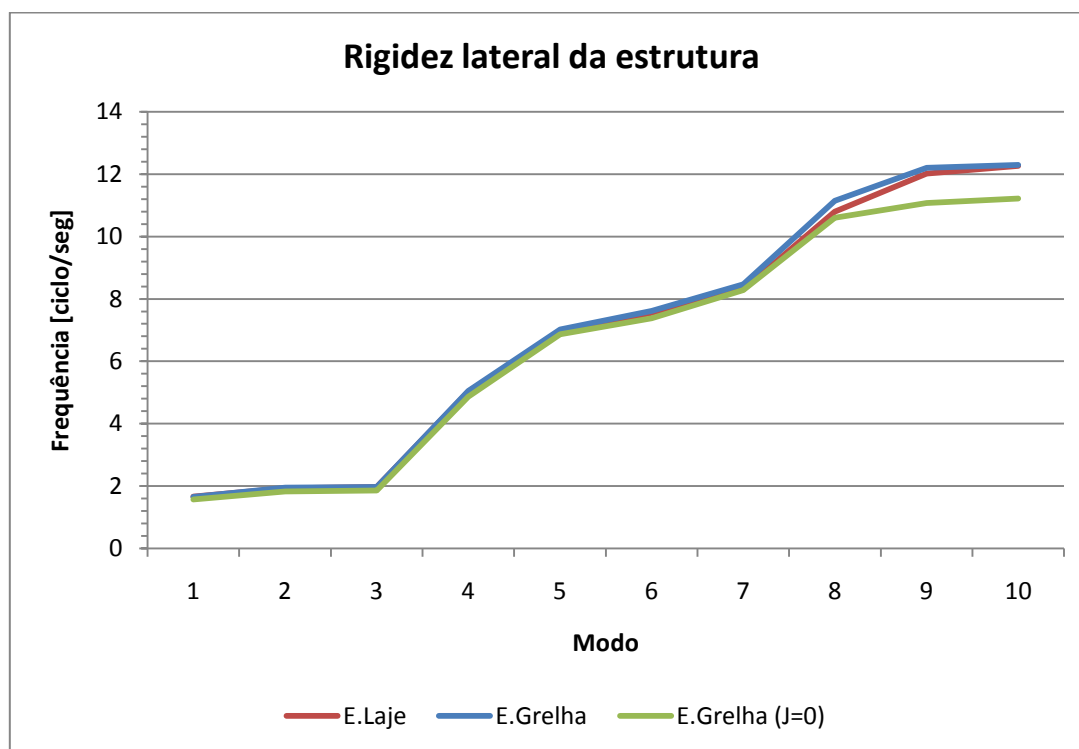


Gráfico 4.1 – Rigidez lateral da estrutura através dos três modelos

4.3 Análise de deformações na laje

Para garantir um bom comportamento das estruturas em situações correntes de utilização, deve ser verificada a segurança ao Estado Limite de Serviço (ELS). Uma das condições de segurança consiste na determinação das deformações e sua comparação com o valor admissível. Assim, para a análise das deformações, considerou-se o ELS. [31]

Após este passo, todos os dados necessários estão introduzidos e testou-se o modelo com o auxílio do programa de cálculo.

Para a selecção dos alinhamentos procuraram-se os alinhamentos com as maiores deformações/esforços, para que as diferenças nos resultados dos modelos fossem mais evidentes.

Desta forma foram seleccionados os seguintes alinhamentos (Figura 4.1):

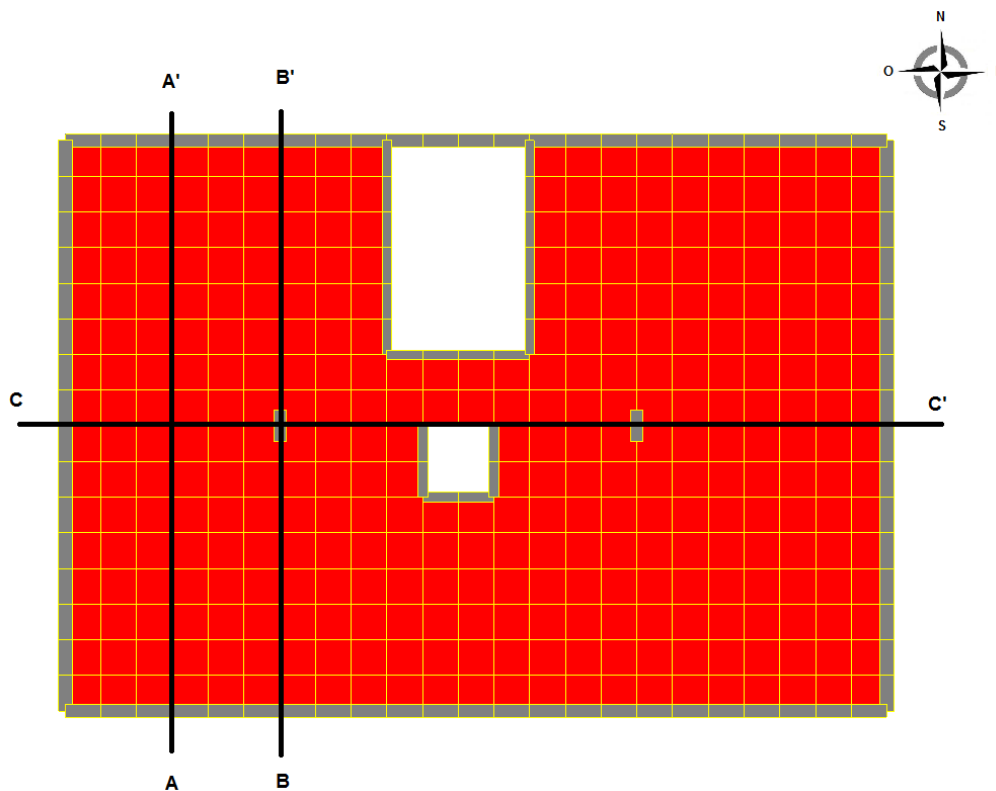


Figura 4.1 – Alinhamentos de pontos seleccionados

Após a definição dos alinhamentos passou-se à análise concreta das deformações ao longo dos mesmos.

a) Alinhamento AA'

Os valores dos deslocamentos extraídos do modelo de elementos de laje organizaram-se na tabela seguinte (Tabela 4.2). De seguida, procedeu-se do mesmo modo para o modelo de elementos de grelha mas em duas iterações. Na primeira iteração considerou-se a rigidez de torção J , na segunda desprezou-se a rigidez de torção, ou seja, $J=0$.

Depois de obtidos os valores dos deslocamentos relativos aos 3 modelos (contabilizando as duas iterações no modelo de grelha, como dois modelos), fez-se a diferença percentual dos modelos de elementos de grelha em relação aos valores obtidos pelo modelo de elementos de laje (Tabela 4.2). As linhas preenchidas a azul balizam a zona A_1 , que por sua vez representa a zona de maiores deslocamentos no alinhamento, e as linhas preenchidas a cinzento, a zona A_2 , que representa a zona de menores deslocamentos (uma vez que se encontra perto de dois pilares) além das extremidades do alinhamento.

Tabela 4.2 – Deslocamentos ao longo do alinhamento AA'

Distância	Elemento Laje	Elemento Grelha		Elemento Grelha ($J=0$)	
	<i>Deslocamento Z</i>	<i>Deslocamento Z</i>	<i>Variação</i>	<i>Deslocamento Z</i>	<i>Variação</i>
	[mm]	[mm]	%	[mm]	%
0	-0,6	-0,7	13,5	-0,7	10,8
0,8	-1,3	-1,8	24,6	-1,8	27,4
1,6	-2,0	-2,7	25,3	-2,8	28,2
2,4	-2,4	-3,3	24,8	-3,4	27,5
3,2	-2,6	-3,4	24,0	-3,6	26,8
4	-2,5	-3,2	23,8	-3,4	27,4
4,8	-2,1	-2,8	24,0	-3,0	29,9
5,6	-1,7	-2,3	24,5	-2,6	34,2
6,4	-1,5	-2,0	25,7	-2,5	37,9
7,2	-1,7	-2,2	25,1	-2,6	35,4
8	-2,1	-2,7	24,9	-3,0	31,3
8,8	-2,5	-3,3	24,8	-3,5	28,8
9,6	-2,7	-3,6	25,2	-3,8	28,2
10,4	-2,6	-3,6	26,4	-3,7	29,5
11,2	-2,3	-3,1	27,9	-3,3	32,0
12	-1,7	-2,4	30,1	-2,6	36,2
12,8	-1,1	-1,6	32,5	-1,8	42,3

Para uma melhor visualização dos valores dos deslocamentos obtidos para os 3 modelos, transformaram-se esses dados em informação gráfica (Gráfico 4.2) e tiraram-se as seguintes ilações:

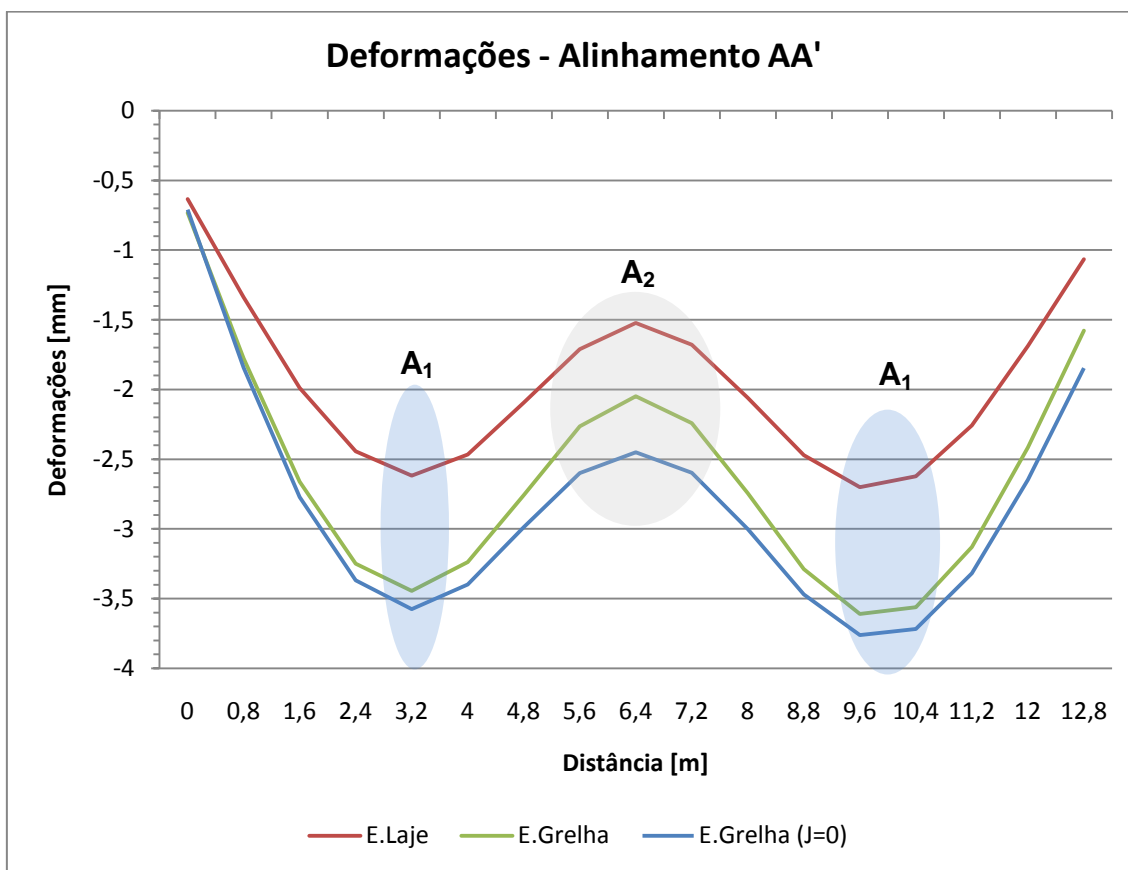


Gráfico 4.2 – Deslocamentos ao longo do alinhamento AA'

Da observação das linhas correspondentes aos deslocamentos dos elementos de grelha (as 2 iterações) como previsto, pode constatar-se que quando se considera a torção nula ($J=0$), os deslocamentos vão ser maiores (tal como foi referido em 2.4.3.2). Ao medir-se a diferença dos deslocamentos nas duas zonas sombreadas A_1 (correspondentes às maiores flechas), chega-se a uma diferença na ordem dos 3%. Ou seja, o facto de se considerar a rigidez de torção permite obter deslocamentos, em média, 3% menores.

Da observação da tabela pode constatar-se que nas zonas de maiores deslocamentos A_1 , os deslocamentos do modelo de elementos de laje em relação aos deslocamentos do modelo de grelha com rigidez de torção J são na ordem dos 25% menores e em relação ao modelo de elementos de grelha sem rigidez de torção ($J=0$), são cerca de 28% menores.

É importante ter em consideração a zona A_2 do Gráfico 4.2 que traduz a influência dos pilares a meio vão deste alinhamento. Isto porque, se modelo for mais flexível, esta zona permitirá maiores deslocamentos, o que, consequentemente, originará maiores deslocamentos nas zonas das flechas máximas (A_1).

Do ponto de vista global, é possível observar que os gráficos têm comportamentos distintos no início e final dos seus andamentos. Supõe-se que essa diferença nos deslocamentos seja influência da rigidez das vigas de bordadura (derivada das suas

dimensões) e da flexibilidade dos elementos de modelação da laje. Assim, como a viga final V_3 é mais flexível que a viga inicial V_2 e os elementos de grelha são mais flexíveis que os elementos de laje, os deslocamentos finais vão ser diferentes. O mesmo não acontece nos deslocamentos iniciais, onde a rigidez da viga aparentemente consegue uniformizar os deslocamentos independentemente do modelo utilizado.

b) Alinhamento BB'

No alinhamento BB' não são esperadas deslocamentos muito elevados uma vez que este se encontra sobre um alinhamento de pilares.

Retiraram-se os valores dos deslocamentos neste alinhamento para as mesmas situações referidas na análise do alinhamento AA'. Os valores encontram-se organizados na Tabela 4.3. À semelhança da análise do alinhamento AA', as células a azul delimitam a zona B_1 e as células a cinzento a zona B_2 , que correspondem as zonas de maiores e menores deslocamentos respectivamente.

Tabela 4.3 – Deslocamentos ao longo do alinhamento BB'

Distância	Elemento Laje	Elemento Grelha		Elemento Grelha (J=0)	
	<i>Deslocamento Z</i>	<i>Deslocamento Z</i>	<i>Variação</i>	<i>Deslocamento Z</i>	<i>Deslocamento Z</i>
	[mm]	[mm]	%	[mm]	%
0	-0,2	-0,2	0,6	-0,2	1,9
0,8	-0,7	-1,0	26,3	-1,1	32,9
1,6	-1,6	-2,1	24,4	-2,4	33,9
2,4	-2,1	-2,8	24,5	-3,2	35,3
3,2	-2,2	-2,9	23,8	-3,4	35,8
4	-1,9	-2,5	23,5	-3,0	36,2
4,8	-1,4	-1,8	22,6	-2,1	35,6
5,6	-0,7	-0,9	21,9	-1,0	32,8
6,4	-0,2	-0,2	13,7	-0,2	14,7
7,2	-0,5	-0,6	23,7	-0,7	31,6
8	-1,1	-1,4	25,2	-1,7	35,0
8,8	-1,6	-2,1	26,5	-2,5	35,7
9,6	-1,9	-2,5	27,1	-2,9	35,3
10,4	-1,8	-2,5	27,9	-2,8	35,1
11,2	-1,4	-1,9	28,0	-2,1	34,2
12	-0,7	-1,0	29,6	-1,0	33,7
12,8	-0,1	-0,1	4,8	-0,1	2,9

Para visualizar melhor os resultados obtidos, transferiram-se estes para o gráfico seguinte (Gráfico 4.3) e retiraram-se as seguintes conclusões:

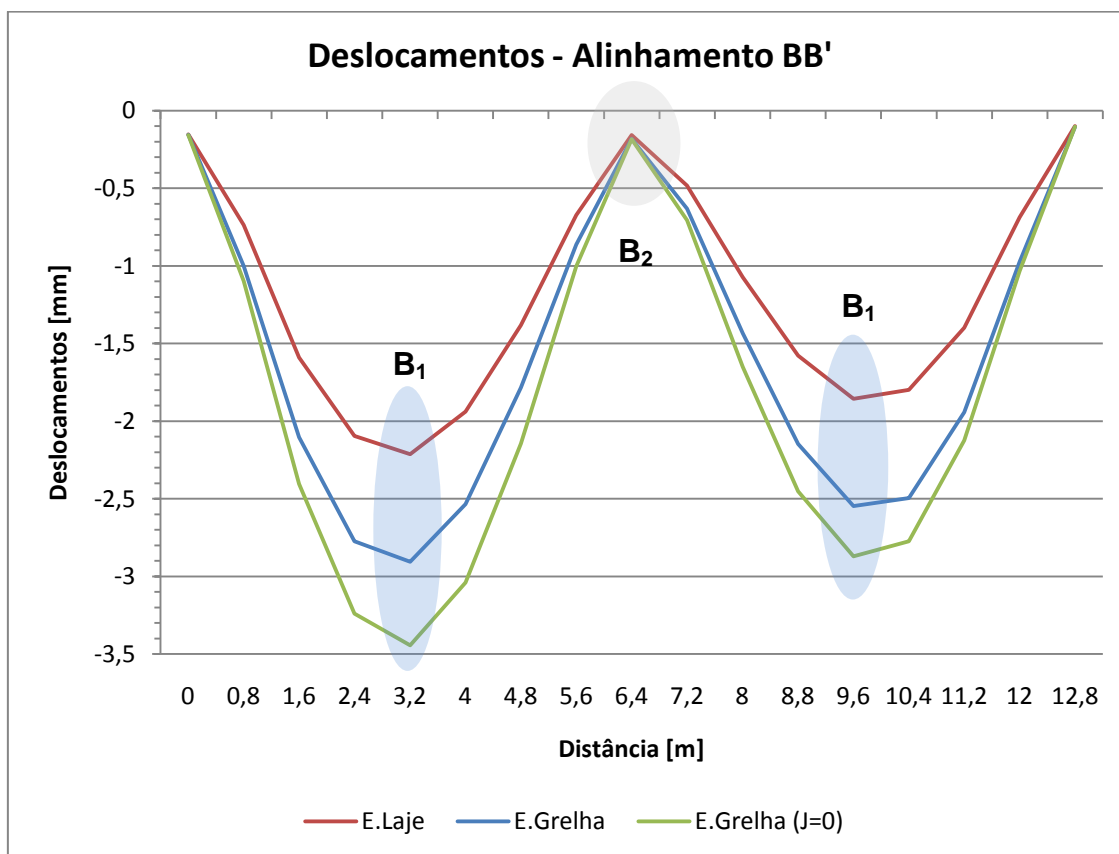


Gráfico 4.3 - Deslocamentos ao longo do alinhamento BB'

Agora, ao comparar os elementos de grelha, com e sem rigidez de torção (J e $J=0$ respectivamente), nas zonas de maior deformação (B_1), a diferença é na ordem dos 10%. Em comparação com a diferença de flechas obtidas para os mesmos elementos no alinhamento anterior (3%), a diferença é substancial. A explicação mais provável para tal facto prende-se com a presença do pilar a meio vão do alinhamento BB', que no modelo de elementos de grelha com rigidez de torção não permite deslocamentos tão elevados como no modelo de elementos de grelha sem rigidez de torção. Facto que também se verificou na análise do alinhamento anterior.

Se a comparação for feita entre os deslocamentos dos elementos de laje e os elementos de grelha com e sem rigidez de torção, obtêm-se diferenças na ordem dos 25 e 35% respectivamente. Este resultado está na mesma ordem de grandeza do valor obtido quando comparadas os deslocamentos nos mesmo modelos no alinhamento anterior.

Por fim chama-se a atenção para a diferença da zona A_2 do Gráfico 4.2 para a zona B_2 do Gráfico 4.3. Na zona A_2 os deslocamentos são diferentes, consoante as características de cada modelo, o mesmo não se passa na zona B_2 onde a presença do pilar impõe deslocamentos iguais em todos os modelos.

c) Alinhamento CC'

Os procedimentos neste alinhamento foram em tudo idênticos aos executados no alinhamento anterior, bem como as células a azul e cinzento que mais uma vez representam as zonas C_1 e C_2 respectivamente. Assim, os resultados numéricos resultantes do programa de cálculo para os 3 modelos que vêm a ser estudados nos alinhamentos transactos encontram-se tabelados no Tabela 4.4.

Tabela 4.4 - Deslocamentos ao longo do alinhamento CC'

Distância	Elemento Laje	Elemento Grelha		Elemento Grelha (J=0)	
	Deslocamento Z	Deslocamento Z	Variação	Deslocamento Z	Deslocamento Z
	[mm]	[mm]	%	[mm]	%
0	-0,1	-0,1	2,1	-0,1	3,4
0,8	-0,7	-0,9	26,6	-1,1	35,3
1,6	-1,3	-1,8	25,3	-2,1	36,8
2,4	-1,5	-2,0	25,7	-2,5	37,9
3,2	-1,3	-1,7	24,8	-2,0	37,0
4	-0,7	-0,9	25,9	-1,0	35,9
4,8	-0,2	-0,2	13,7	-0,2	14,7
5,6	-0,2	-0,3	7,4	-0,3	12,2
6,4	-0,2	-0,2	0,9	-0,3	15,9
7,2	-0,1	-0,1	0,0	-0,1	0,0
8	-0,0	-0,0	0,0	-0,0	0,0
8,8	-0,0	-0,0	0,0	-0,0	0,0
9,6	-0,0	-0,0	0,0	-0,0	0,0
10,4	-0,2	-0,2	1,1	-0,2	16,1
11,2	-0,4	-0,4	10,5	-0,5	24,2
12	-0,5	-0,5	14,2	-0,6	25,0
12,8	-0,4	-0,4	14,3	-0,4	20,6
13,6	-0,2	-0,2	13,6	-0,2	14,4
14,4	-0,7	-0,9	24,7	-1,0	34,6
15,2	-1,3	-1,7	24,1	-2,0	36,2
16	-1,5	-2,0	25,2	-2,4	37,3
16,8	-1,3	-1,8	24,9	-2,1	36,2
17,6	-0,7	-0,9	26,2	-1,1	34,8
18,4	-0,1	-0,1	2,1	-0,1	3,4

De forma a visualizar melhor os diferentes resultados esta informação foi transferida para o Gráfico 4.4.

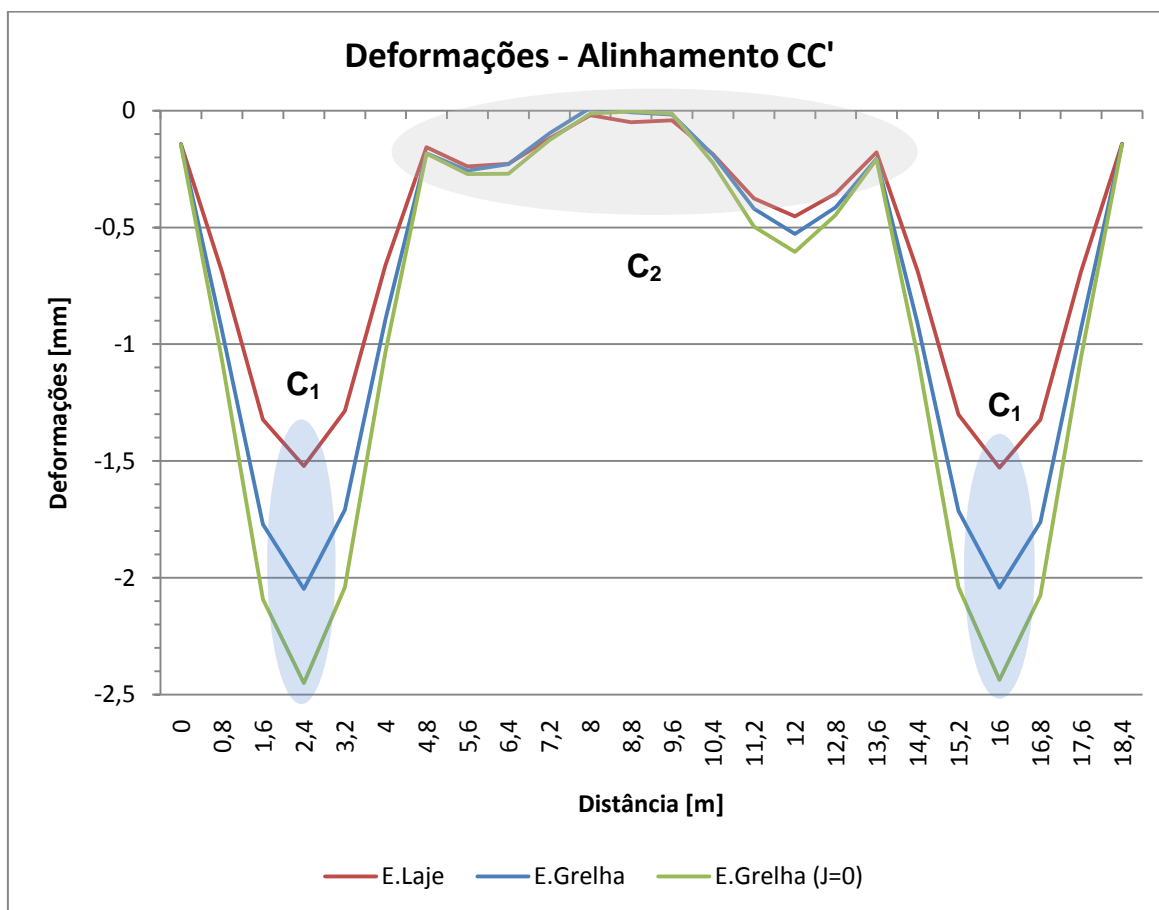


Gráfico 4.4 – Deslocamentos ao longo do alinhamento DD'

Da análise do gráfico pode-se constatar o seguinte:

Relativamente às deformações dos modelos de elementos de grelha com e sem rigidez de torção, à semelhança do que foi verificado na análise das deformações dos alinhamentos anteriores, constata-se uma maior deformação, na ordem dos 12% nas zonas C₁, no modelo de elementos de grelha sem rigidez de torção.

Na comparação das linhas relativas ao modelo de elementos de laje e modelo de elementos de grelha com e sem rigidez de torção, verifica-se uma diferença na ordem dos 25% e 37% respectivamente, nas zonas C₁.

Conclusão relativa aos deslocamentos:

a) Como se pôde constatar as deformações nos modelos com elementos de grelha foram sempre maiores do que no modelo com elementos de laje, e dentro dos modelos de elementos de grelha os deslocamentos foram sempre maiores no modelo onde não se considerava a rigidez de torção.

b) Pelo aumento das diferenças entre deformadas, à medida que se analisavam modelos mais rígidos (alinhamentos AA', BB' e CC'), podemos afirmar que, quanto mais rígido é o

alinhamento, maiores as diferenças entre os deslocamentos no modelo de elementos de grelha e o modelo de elementos de laje.

4.4 Análise de esforços na laje

Um dos objectivos da segurança na engenharia estrutural é assegurar um nível de segurança adequado em relação a determinadas situações de rotura. Esta segurança é conseguida, de forma regulamentar, se se verificar a segurança aos Estados Limites Últimos (ELU). [31]

Tanto os alinhamentos visados como o procedimento com o programa de cálculo foram feitos com base no mesmo procedimento considerado na análise dos deslocamentos.

Os esforços analisados foram o esforço transversal, pela sua relação com o punçoamento, e o momento flector, derivado da exigência de verificar o ELU de flexão.

É corrente nos programas de elementos finitos, existir a possibilidade de fornecer os campos de esforços contínuos com base na interpolação dos esforços nodais. Salienta-se que, nesta dissertação, não se recorreu a essa opção e que, para cada nó ao longo do alinhamento, não foi feita a média dos 4 pontos relativo a cada elemento (1 ponto por cada elemento). O procedimento adoptado em cada nó foi, separar os elementos de laje de cada lado do elemento e, em cada lado, construí-se as tabelas e gráficos com as respectivas faltas de continuidade entre elementos.

Após a saída dos valores do programa de cálculo, para os dados relativos aos elementos de grelha, tal como previsto em 2.4.5, foi necessário transformar os esforços de elementos unidimensionais em esforços de banda de laje, bidimensionais, a fim de possibilitar a comparação destes esforços com os obtidos para os elementos de laje.

a) Alinhamento AA'

Com o tratamento dos dados saídos do programa de cálculo executado, tabelaram-se os valores relativos ao alinhamento AA' (Tabela 4.5).

Tal como foi referido, os valores do elemento de laje foram separados. Assim, foram tabelados os valores dos elementos a este do alinhamento e a oeste do alinhamento, conforme a Figura 4.1.

Tabela 4.5 – Esforços segundo o alinhamento AA'

	E. Grelha (J=0)		E. Grelha (J≠0)		E. Laje (Este)		E. Laje (Oeste)	
	<i>Esforço Transverso em y</i>	<i>Momento flector em z</i>	<i>Esforço Transverso em y</i>	<i>Momento flector em z</i>	<i>Esforço Transverso em yz</i>	<i>Momento flector em yy</i>	<i>Esforço Transverso em yz</i>	<i>Momento flector em yy</i>
	[kN/m]	[kNm/m]	[kN/m]	[kNm/m]	[kN/m]	[kNm/m]	[kN/m]	[kNm/m]
0	-26,89	0,03	-22,69	0,02	-15,33	-0,23	-5,94	-1,36
0,8	-19,24	18,47	-15,05	15,12	-15,33	14,57	-5,94	15,92
0,8	-19,84	18,47	-19,02	16,46	-15,29	14,39	-10,51	13,41
1,6	-12,19	31,28	-11,37	28,61	-15,29	29,30	-10,51	30,45
1,6	-11,91	31,28	-12,52	30,03	-11,04	26,99	-8,95	27,00
2,4	-4,26	37,75	-4,87	36,99	-11,04	36,49	-8,95	36,81
2,4	-0,58	37,75	-3,08	36,99	-2,41	32,79	-2,32	32,75
3,2	7,06	35,16	4,57	36,40	-2,41	34,48	-2,32	35,03
3,2	14,51	35,16	7,85	34,11	4,41	34,41	5,15	34,80
4	22,16	20,50	15,49	24,77	4,41	28,62	5,15	29,07
4	24,54	20,50	16,00	19,59	9,49	19,57	11,04	19,65
4,8	32,18	-2,19	23,64	3,73	9,49	7,88	11,04	7,92
4,8	16,98	-2,19	14,68	-4,71	10,14	5,71	10,46	5,42
5,6	24,63	-18,84	22,33	-19,51	10,14	-8,54	10,46	-8,38
5,6	0,02	-18,84	2,18	-28,31	1,08	-12,57	-0,29	-12,26
6,4	7,67	-21,91	9,83	-33,12	1,08	-21,72	-0,29	-22,22
6,4	-5,56	-21,91	-8,36	-34,33	-6,28	-25,49	-4,14	-26,12
7,2	2,09	-20,52	-0,72	-30,70	-6,28	-12,75	-4,14	-12,54
7,2	-20,91	-20,52	-21,76	-23,12	-15,24	-12,80	-14,84	-13,02
8	-13,26	-6,86	-14,11	-8,78	-15,24	5,27	-14,84	5,36
8	-29,99	-6,86	-25,17	-0,46	-15,87	3,78	-15,96	3,83
8,8	-22,34	14,07	-17,52	16,61	-15,87	19,59	-15,96	19,46
8,8	-22,35	14,07	-18,33	21,68	-10,64	25,96	-10,39	25,80
9,6	-14,71	28,90	-10,69	33,28	-10,64	35,69	-10,39	36,28
9,6	-6,95	28,90	-7,35	34,89	-5,51	34,98	-3,04	35,13
10,4	0,70	31,40	0,30	37,71	-5,51	37,71	-3,04	38,10
10,4	8,27	31,40	3,61	36,11	0,86	36,67	2,97	36,31
11,2	14,10	22,45	9,43	30,89	0,86	32,29	2,97	32,99
11,2	14,17	22,45	8,55	25,86	2,87	28,50	5,01	28,51
12	21,82	8,06	16,20	15,96	2,87	20,08	5,01	20,10
12	6,03	8,06	5,83	7,82	0,35	12,34	0,15	12,05
12,8	13,67	0,18	13,48	0,10	0,35	5,19	0,15	5,00

Para uma melhor visualização dos valores obtidos, processou-se esta informação para os gráficos seguintes (Gráfico 4.5 e Gráfico 4.6) e tiraram-se as seguintes ilações:

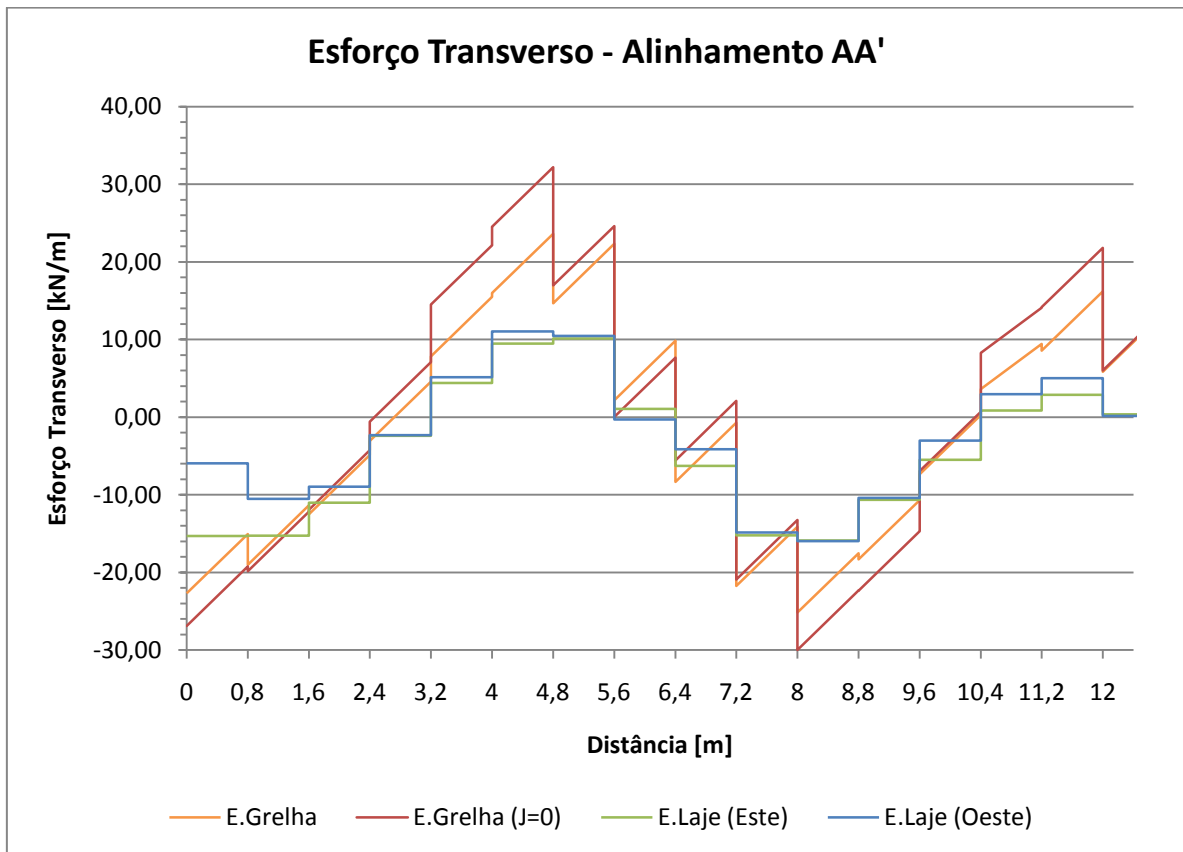


Gráfico 4.5 – Esforço transversal no alinhamento AA'

Relativamente ao esforço transversal (Gráfico 4.5), facilmente se observa que, nos modelos com elementos de grelha, o esforço transversal assume valores, negativos e positivos, mais elevados do que os obtidos com o modelo de elementos de laje.

Quando comparando apenas os elementos de grelha, é possível constatar que o modelo de elementos de grelha sem rigidez de torção obtém maiores valores de esforço transversal do que o modelo que considera a rigidez de torção. Supõe-se que a explicação reside no que foi escrito na parte final de 2.4.3.2, onde se afirma que nos modelos em que não se considera a rigidez de torção obtém momentos flectores mais elevados, uma vez que o carregamento é equilibrado apenas com a parcela dos momentos flectores. Ora, como se sabe da Teoria da Elasticidade, o momento flector está directamente relacionado com o esforço transversal, pelo que analogamente se justifica o aumento dos valores de esforço transversal no caso de elementos que não consideram a rigidez de torção.

Da análise das linhas de esforço transversal a este e oeste do alinhamento dado pelo modelo de elementos de laje, pode verificar-se a descontinuidade do esforço transversal entre elementos.

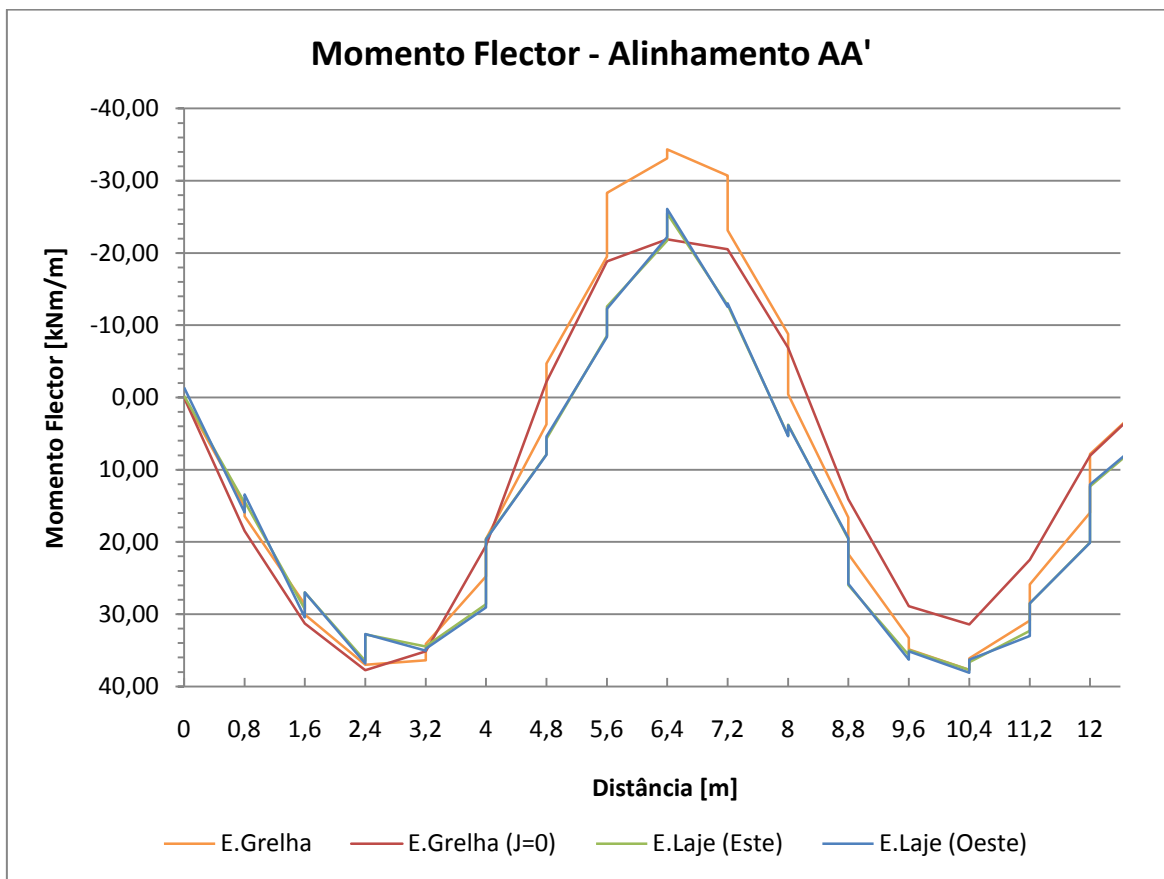


Gráfico 4.6 – Momento flector ao longo do alinhamento AA'

Não é necessário fazer uma observação muito exaustiva para perceber que o andamento das linhas relativas aos momentos flectores em cada modelo (Gráfico 4.6) não apresenta um paralelismo significativo, isto é, não se consegue definir se um modelo obtém maiores valores de momento flector do que o outro, uma vez que as linhas estão constantemente a cruzarem-se em vez de assumirem percursos razoavelmente paralelos.

Numa observação mais atenta é possível constatar uma grande diferença nos trajectos dos digramas dos modelos de elementos de grelha. Se por um lado a linha do modelo de elementos de grelha com rigidez de torção apresenta bastantes “saltos” entre os vários elementos ao longo do alinhamento, por outro, o modelo de elementos de grelha sem rigidez de torção, apresenta uma trajectória contínua.

Os referidos “saltos” resultam do equilíbrio de momentos nos nós. Isto porque o momento no final de um elemento de grelha não é igual ao momento no início do elemento de grelha adjacente, a não ser que os momentos torsores dos elementos que lhes são perpendiculares sejam nulos. [5] Conclui-se assim que a consideração ou não da rigidez de torção determina a continuidade ou não da trajectória dos digramas dos momentos flectores, uma vez que os momentos torsores também estão envolvidos no equilíbrio do nó.

b) Alinhamento BB'

Para o alinhamento BB' os dados obtidos relativos ao esforço transverso e momento flector encontram-se na Tabela 4.6. Nesta, as células a azul destacam as zonas de maior concentração de esforços, apresentados no Gráfico 4.7 como D₁ e D₂ e D₃ e D₄, e no Gráfico 4.8 como E₁ e E₂. À semelhança do alinhamento anterior, aqui também se separaram os valores do elemento de laje a este e oeste do alinhamento.

Esta informação na forma gráfica tem o seguinte aspecto (Gráfico 4.7 e Gráfico 4.8):

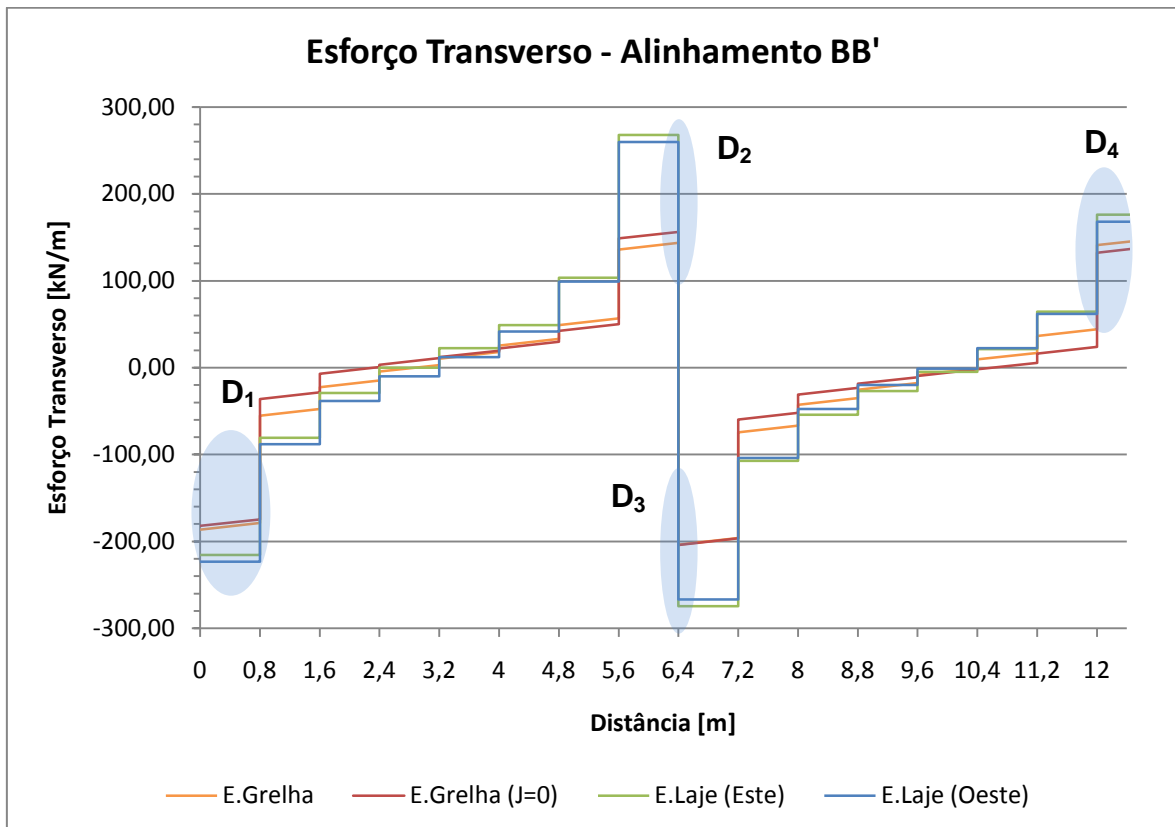


Gráfico 4.7 – Esforço transverso ao longo do alinhamento BB'

Da comparação dos vários digramas presentes no Gráfico 4.7, pode-se constatar o seguinte:

Primeiro, o paralelismo e proximidade das linhas dos elementos de grelha com e sem rigidez de torção. Contudo note-se a supremacia dos valores obtidos pelo modelo de elementos de grelha sem rigidez de torção em relação ao outro modelo que despreza a mesma. Facto que vem dar coerência às ilações retiradas da análise feita ao Gráfico 4.5.

Segundo, a constante superioridade dos valores do esforço transverso obtidos pelo modelo de elementos de laje em relação ao modelo de elementos de grelha. Nos locais mais importantes (zonas sombreadas), as variações de valores de esforço transverso são de 18,4% em D₁, 40,4% em D₂, 24,2% em D₃ e 17% em D₄.

Tabela 4.6 – Esforços ao longo do alinhamento BB'

	E. Grelha (J=0)		E. Grelha (J≠0)		E. Laje (Este)		E. Laje (Oeste)	
	<i>Esforço Transverso em y</i>	<i>Momento flector em z</i>	<i>Esforço Transverso em y</i>	<i>Momento flector em z</i>	<i>Esforço Transverso em yz</i>	<i>Momento flector em yy</i>	<i>Esforço Transverso em yz</i>	<i>Momento flector em yy</i>
	[kN/m]	[kNm/m]	[kN/m]	[kNm/m]	[kN/m]	[kNm/m]	[kN/m]	[kNm/m]
0	-182,18	-113,06	-184,67	-101,48	-215,43	-64,08	-223,26	-66,37
0,8	-174,54	29,63	-177,02	43,19	-215,43	5,24	-223,26	2,78
0,8	-36,00	29,63	-48,33	18,94	-80,52	11,06	-87,88	11,02
1,6	-28,35	55,36	-40,69	54,55	-80,52	48,83	-87,88	46,79
1,6	-6,87	55,36	-17,04	41,57	-29,26	24,26	-38,30	24,86
2,4	0,78	57,80	-9,40	52,14	-29,26	41,36	-38,30	39,87
2,4	3,43	57,80	-1,86	45,48	0,03	36,99	-9,85	38,57
3,2	11,07	52,00	5,79	43,90	0,03	39,23	-9,85	37,84
3,2	12,13	52,00	10,92	41,16	22,37	31,71	12,04	33,61
4	19,78	39,24	18,57	29,36	22,37	20,79	12,04	20,08
4	22,39	39,24	24,55	31,21	49,01	27,44	41,72	29,60
4,8	30,03	18,27	32,20	8,51	49,01	3,85	41,72	3,97
4,8	42,45	18,27	47,02	17,34	103,70	11,82	99,09	13,84
5,6	50,10	-18,75	54,67	-23,34	103,70	-29,11	99,09	-27,05
5,6	147,10	-18,75	138,89	-2,04	267,97	-25,91	259,78	-21,87
6,4	154,74	-139,48	146,54	-116,21	267,97	-98,65	259,78	-90,88
6,4	-202,18	-188,30	-205,76	-173,41	-274,41	-132,23	-266,69	-124,42
7,2	-194,53	-29,62	-198,11	-11,86	-274,41	-55,36	-266,69	-51,13
7,2	-59,43	-29,62	-69,85	-36,18	-107,05	-32,44	-103,99	-29,84
8	-51,78	14,87	-62,20	16,64	-107,05	13,02	-103,99	14,46
8	-30,82	14,87	-38,50	5,33	-54,19	-0,88	-47,65	-0,96
8,8	-23,18	36,46	-30,86	33,07	-54,19	27,06	-47,65	29,20
8,8	-18,58	36,46	-22,98	29,54	-26,72	22,88	-19,83	22,83
9,6	-10,94	48,27	-15,33	44,87	-26,72	38,56	-19,83	39,88
9,6	-9,56	48,27	-8,94	45,02	-4,74	38,24	-1,17	37,87
10,4	-1,91	52,86	-1,30	49,11	-4,74	41,50	-1,17	42,22
10,4	-2,04	52,86	5,66	51,94	21,53	42,09	22,41	42,07
11,2	5,61	51,43	13,31	44,36	21,53	32,45	22,41	32,73
11,2	16,10	51,43	29,80	52,30	64,37	43,81	61,74	44,34
12	23,75	35,49	37,44	25,41	64,37	17,76	61,74	18,18
12	131,79	35,49	137,65	45,27	176,05	9,73	167,94	11,78
12,8	139,44	-73,00	145,30	-67,90	176,05	-41,42	167,94	-38,12

Os elevados valores do esforço transversal do modelo de elementos de laje nestas zonas, julgam-se relacionados com a elevada variação do momento flector e momento torsor. Um outro factor a ter em conta é a aplicação de cargas concentradas em elementos de laje. De acordo com a análise elástica de lajes, as cargas concentradas provocam momentos flectores infinitos no ponto onde actuam. Contudo, na prática, as cargas concentradas são sempre distribuídas numa pequena área. Este fenómeno, característico dos elementos de laje, devido à sua complexidade não é aqui desenvolvido como tal remete-se os leitores mais interessados para Timoshenko [32].

Da análise das linhas presentes no Gráfico 4.8, retiram-se os seguintes apontamentos:

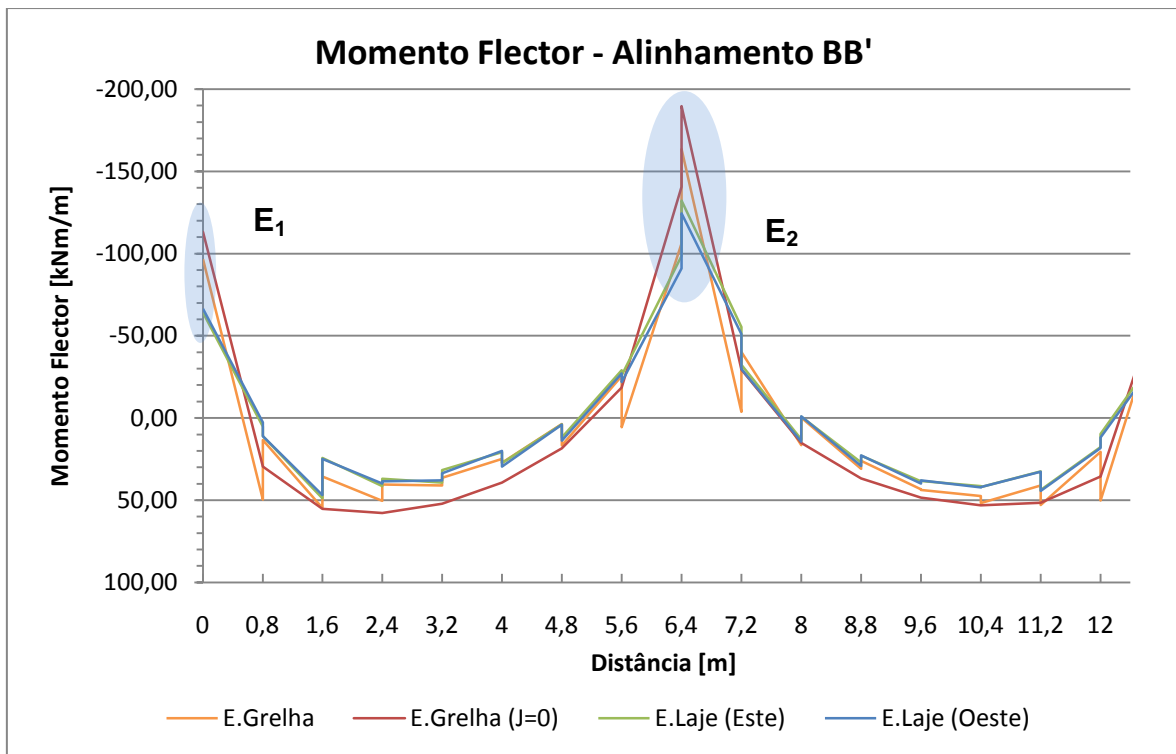


Gráfico 4.8 – Momento flector ao longo do alinhamento BB'

Ao longo de todo o gráfico verifica-se uma constante superioridade dos valores do momento flector relativos ao modelo de elementos de grelha com e sem rigidez de torção em relação aos valores obtidos pelo modelo de elementos de laje, com especial relevo nas zonas E₁ e E₂ onde as diferenças são sensivelmente de 40% e 28% respectivamente.

Os valores dos momentos flectores obtidos para os modelos de elementos de grelha para além de serem sempre superiores aos valores obtidos para o modelo de elementos de laje, são muito idênticos entre si e assumem trajectórias bastante equidistantes, mas sempre com o modelo de elementos de grelha com torção de rigidez nula a fornecer esforços mais elevados em semelhança ao que se descreveu na análise do Gráfico 4.7.

Ainda relativamente ao gráfico atrás referido, é bem visível a presença dos “saltos” na linha relativa ao modelo de elementos de grelha que considera a rigidez de torção e a continuidade da linha relativa ao modelo que não considera a mesma.

Como se sabe, nos elementos de laje, o momento total não depende só do momento flector, mas também do momento torsor. Numa tentativa de determinar com mais rigor o momento total existente nos pontos seleccionados (neste caso ao longo do Alinhamento BB') do elemento de laje, adicionou-se ao momento flector obtido com o modelo de elementos de laje o respectivo momento torsor. Esta adição teve a particularidade de os momentos serem adicionados em módulo, assumindo sempre o sinal do momento flector, de forma a incrementar o momento flector já existente. O resultado final desta adição passou a denominar-se por “Efeito Combinado”.

Assim, apresenta-se o gráfico com o momento flector obtido no modelo de elementos de laje e o respectivo Efeito Combinado (Gráfico 4.10):

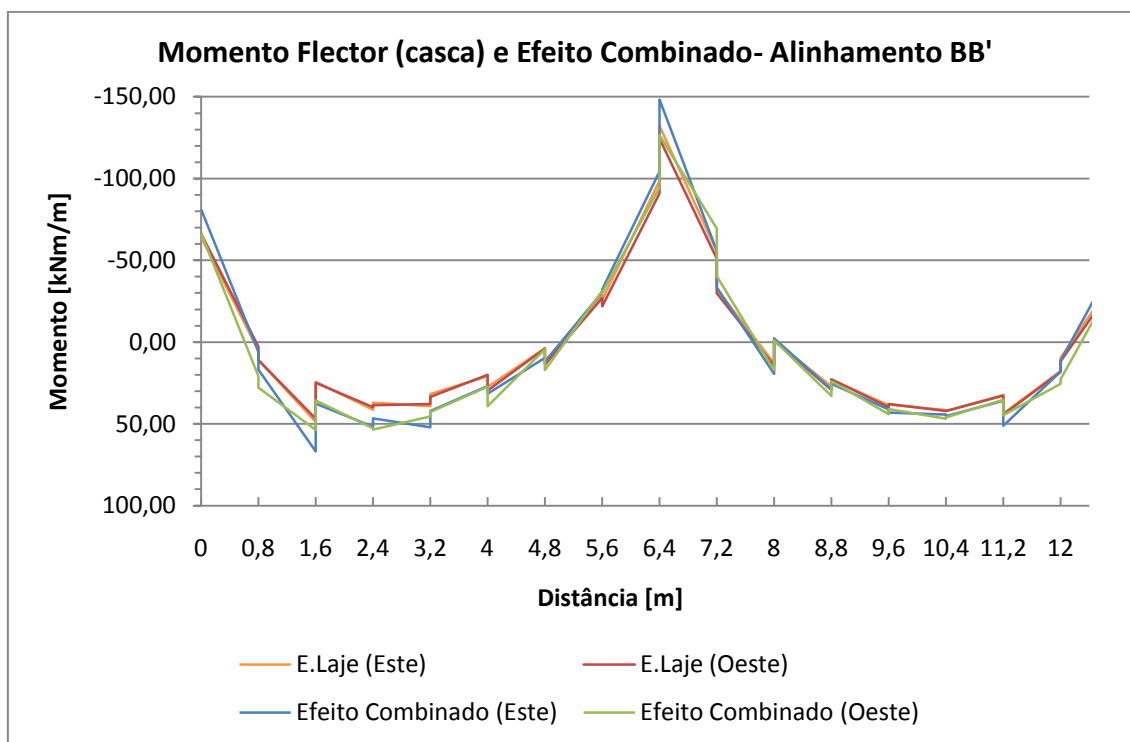


Gráfico 4.9 – Momento flector (laje) e Efeito Combinado – Alinhamento BB'

Como é fácil de constatar e óbvio, se se tiver em conta o procedimento adoptado, os valores do efeito combinado são sempre superiores aos valores do momento flector.

Assim, ao Gráfico 4.8 substituem-se os valores do momento flector do modelo de elementos de laje pelos valores do Efeito Combinado e obteve o seguinte resultado (Gráfico 4.10):

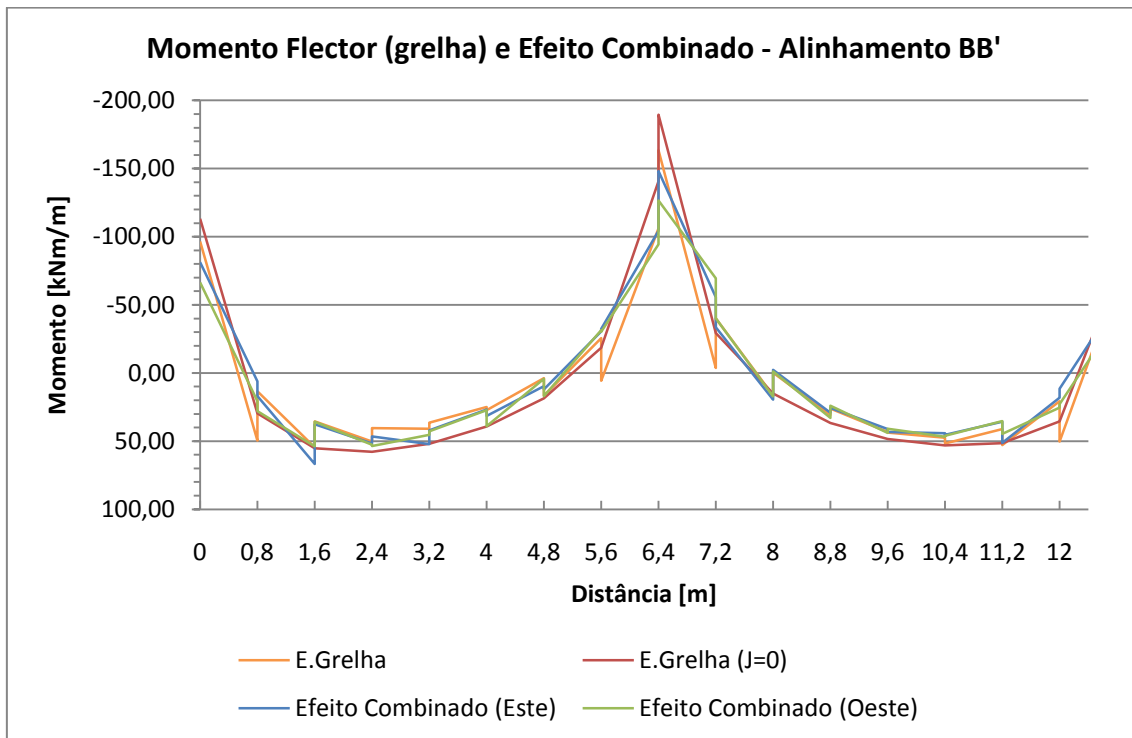


Gráfico 4.10 – Momento flector (grelha) e Efeito Combinado - Alinhamento BB'

Como se pode constatar, as linhas representativas do efeito combinado estão muito mais próximas das linhas do momento flector dos elementos de grelha.

Se destacarmos a zona de abcissa 6,4m, correspondente ao pilar P3, dos Gráficos 4.8 e 4.10, os efeitos desta modificação (momento flector pelo efeito combinado) são mais evidentes (Figura 4.2):

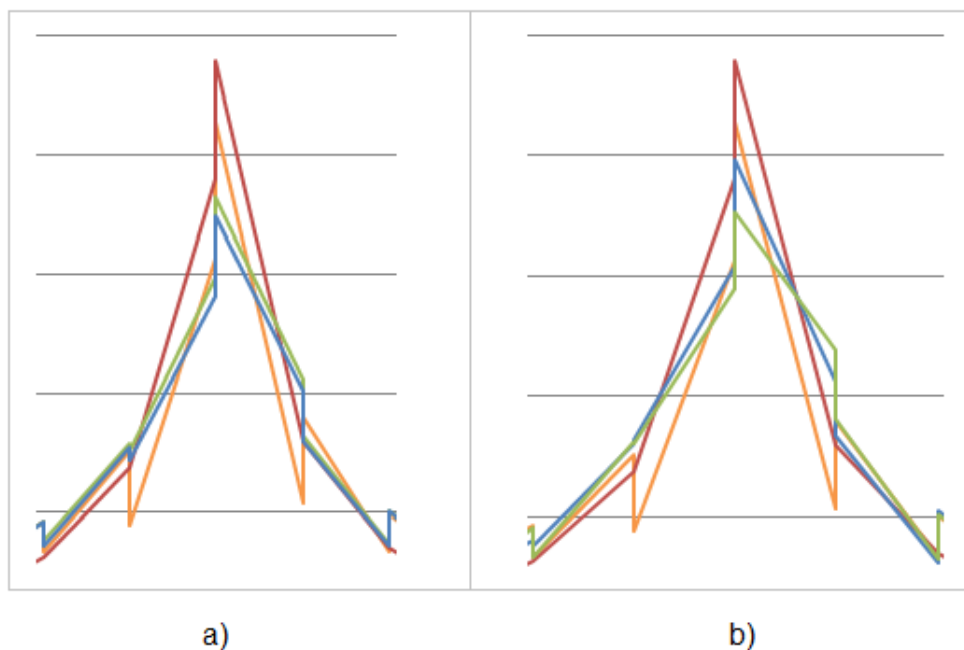


Figura 4.2 – Momento flector a efeito combinado sobre o pilar P3

Do capítulo 2, sabe-se que a solução obtida pela analogia de grelha está do lado da segurança. Por sua vez, a solução obtida pelo MEF é contra a segurança. Assim, do cruzamento destas informações com a observação do Gráfico 4.10, pode-se constatar que ambas as soluções estão muito próximas de solução exacta devido à proximidade das duas soluções (Analogia de grelha e MEF).

c) Alinhamento CC'

Os dados obtidos nos alinhamentos anteriores são, por si só, bastante conclusivos. No entanto, a fim de reforçar as conclusões atrás obtidas, repete-se a análise para o alinhamento CC', sendo este segundo o eixo Oeste-Este.

Os dados relativos aos esforços nos elementos de grelha e elementos de laje ao longo do alinhamento CC' encontram-se na Tabela 4.7. Nesta, as células a azul destacam as zonas de maior concentração de esforços, apresentados no Gráfico 4.11 como G_1 e G_2 , e no Gráfico 4.12 como H_1 , H_2 e H_3 . À semelhança dos alinhamentos anteriores, aqui também se separaram os valores do elemento de laje, agora devido à orientação do alinhamento de pontos, estes encontram-se sobre a referência de norte e sul.

Estes dados na forma gráfica têm o seguinte aspecto (Gráfico 4.11 e Gráfico 4.12):

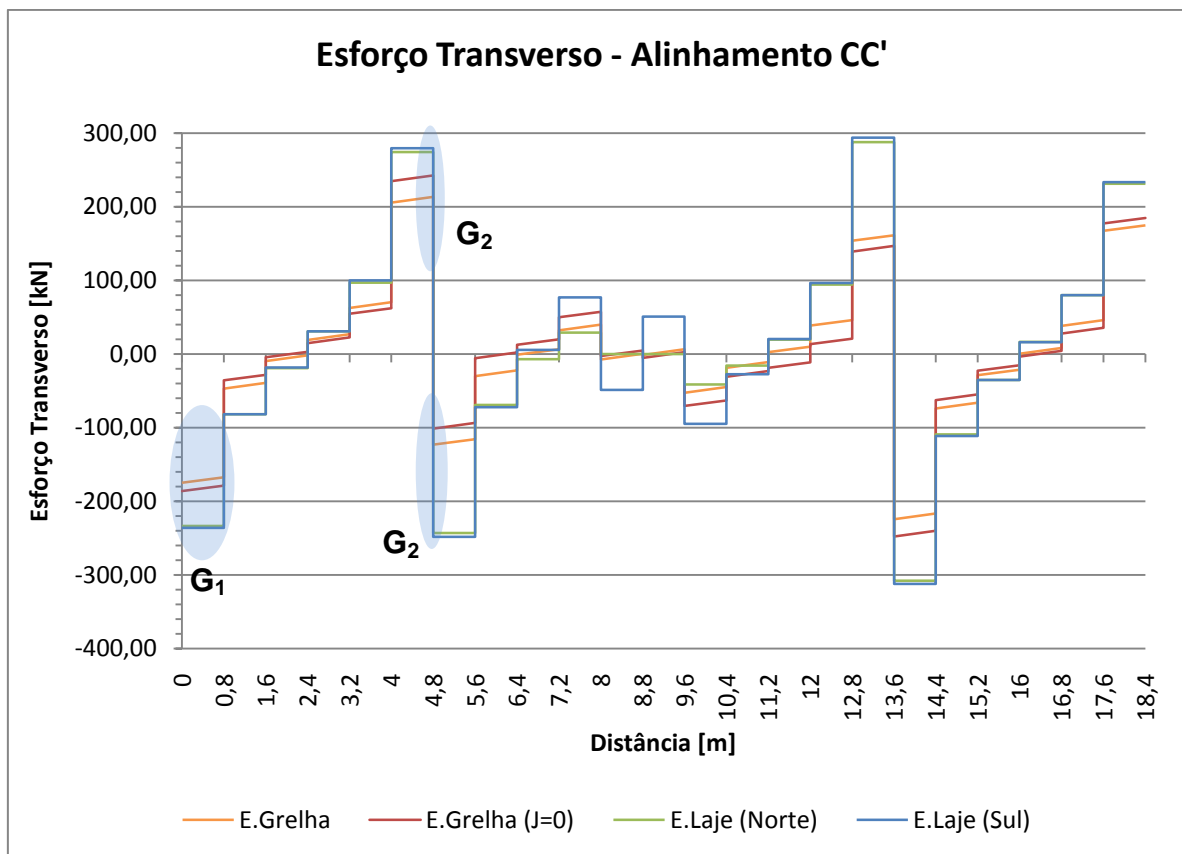


Gráfico 4.11 – Esforço transverso ao longo do alinhamento CC'

Tabela 4.7 - Esforços ao longo do alinhamento CC'

	E. Grelha (J=0)		E. Grelha (J≠0)		E. Laje (Norte)		E. Laje (Sul)	
	<i>Esforço Transverso em y</i>	<i>Momento flector em z</i>	<i>Esforço Transverso em y</i>	<i>Momento flector em z</i>	<i>Esforço Transverso em y</i>	<i>Momento flector em z</i>	<i>Esforço Transverso em y</i>	<i>Momento flector em z</i>
	kN/m	kNm/m	kN/m	kNm/m	kN/m	kNm/m	kN/m	kNm/m
0	-183,16	-94,94	-178,39	-80,84	-233,63	-51,94	-236,11	-54,77
0,8	-177,33	49,25	-170,74	58,81	-233,63	16,98	-236,11	15,51
0,8	-34,50	49,25	-42,79	33,87	-81,66	17,45	-81,84	16,47
1,6	-28,67	74,52	-35,15	65,05	-81,66	49,58	-81,84	49,06
1,6	-3,56	74,52	-7,66	56,67	-19,06	36,07	-18,29	35,46
2,4	2,27	75,04	-0,01	59,74	-19,06	43,21	-18,29	42,53
2,4	15,49	75,04	18,18	61,57	30,84	41,60	30,66	40,80
3,2	21,32	60,32	25,83	43,97	30,84	26,84	30,66	26,36
3,2	54,85	60,32	60,81	55,54	97,14	39,89	100,12	38,96
4	60,68	14,10	68,45	3,84	97,14	-0,14	100,12	-2,17
4	232,60	14,10	216,51	29,19	274,28	-27,13	279,42	-30,58
4,8	238,42	-174,31	224,16	-147,08	274,28	-105,75	279,42	-111,62
4,8	-98,42	-68,61	-115,54	-68,28	-243,19	-61,54	-248,55	-67,49
5,6	-92,60	7,80	-107,89	21,09	-243,19	-5,76	-248,55	-9,34
5,6	-4,35	7,80	-20,94	0,50	-69,10	-15,49	-72,31	-17,77
6,4	1,47	8,95	-13,29	14,19	-69,10	0,50	-72,31	0,34
6,4	13,11	8,95	4,70	3,29	-6,85	1,92	5,69	0,30
7,2	18,94	-3,87	12,34	-3,53	-6,85	-7,32	5,69	-9,64
7,2	49,54	-3,87	39,04	-8,11	29,23	-7,57	77,11	-19,68
8	55,36	-45,83	46,69	-42,40	29,23	-40,56	77,11	-43,99
8	-1,01	-0,10	-4,87	-1,40	0,00	0,00	-48,62	-14,83
8,8	4,82	-1,62	2,78	-0,56	0,00	0,00	-48,62	-2,59
8,8	-5,21	-1,62	-3,32	-0,65	0,00	0,00	51,05	-2,48
9,6	0,62	0,21	4,33	-1,05	0,00	0,00	51,05	-14,40
9,6	-68,28	-59,33	-59,26	-52,87	-41,28	-47,86	-94,95	-50,22
10,4	-62,45	-7,03	-51,61	-8,52	-41,28	-7,43	-94,95	-20,12
10,4	-29,47	-7,03	-23,82	-6,12	-15,60	-8,97	-27,50	-11,00
11,2	-23,65	14,21	-16,17	9,88	-15,60	9,66	-27,50	8,40
11,2	-18,02	14,21	-5,75	16,83	19,47	4,13	20,52	4,52
12	-12,20	26,30	1,90	18,38	19,47	2,25	20,52	1,64
12	13,71	26,30	29,36	29,45	94,27	19,41	96,56	18,33
12,8	19,54	13,00	37,01	2,90	94,27	-9,78	96,56	-11,14
12,8	137,93	13,00	148,79	26,16	287,85	-12,78	293,95	-15,56
13,6	143,75	-99,67	156,44	-95,93	287,85	-84,04	293,95	-89,17
13,6	-243,93	-180,52	-233,08	-154,34	-307,80	-113,25	-312,20	-118,54
14,4	-238,11	12,29	-225,43	29,07	-307,80	-27,95	-312,20	-30,85

14,4	-60,99	12,29	-70,77	1,17	-109,16	-5,87	-111,36	-7,59
15,2	-55,17	58,76	-63,12	54,73	-109,16	37,45	-111,36	36,60
15,2	-21,61	58,76	-27,18	42,10	-35,35	25,46	-35,21	24,96
16	-15,79	73,72	-19,53	60,79	-35,35	41,85	-35,21	41,17
16	-2,43	73,72	-0,85	58,37	16,57	40,74	15,98	40,14
16,8	3,40	73,33	6,79	55,99	16,57	34,72	15,98	34,17
16,8	28,52	73,33	34,63	63,96	79,88	49,20	79,99	48,72
17,6	34,35	48,18	42,28	33,20	79,88	17,87	79,99	17,02
17,6	176,07	48,18	170,30	57,62	231,31	15,02	233,32	13,74
18,4	181,89	-95,00	177,95	-81,68	231,31	-53,12	233,32	-55,53

Da análise deste gráfico, pode-se observar o mesmo paralelismo observado no Gráfico 4.7 entre as linhas referentes ao esforço transversal no modelo de elementos de grelha com e sem rigidez de torção. Com isto demonstra-se a coerência das conclusões anteriores referidas acerca deste modelo com e sem rigidez de torção.

Neste gráfico mantém-se a clara superioridade dos valores do esforço transversal do modelo de elementos de laje, justificada pelo efeito das cargas pontuais em elementos de laje.

Também neste gráfico se verifica uma grande diferença dos valores do esforço transversal do modelo de elementos de laje e do modelo de elementos de grelha (zonas G_1 e G_2), conduzindo à suposição do fenómeno dos elementos de laje quando sujeitos a cargas pontuais.

Os momentos flectores ao longo do alinhamento CC' têm a seguinte forma gráfica (Gráfico 4.12):

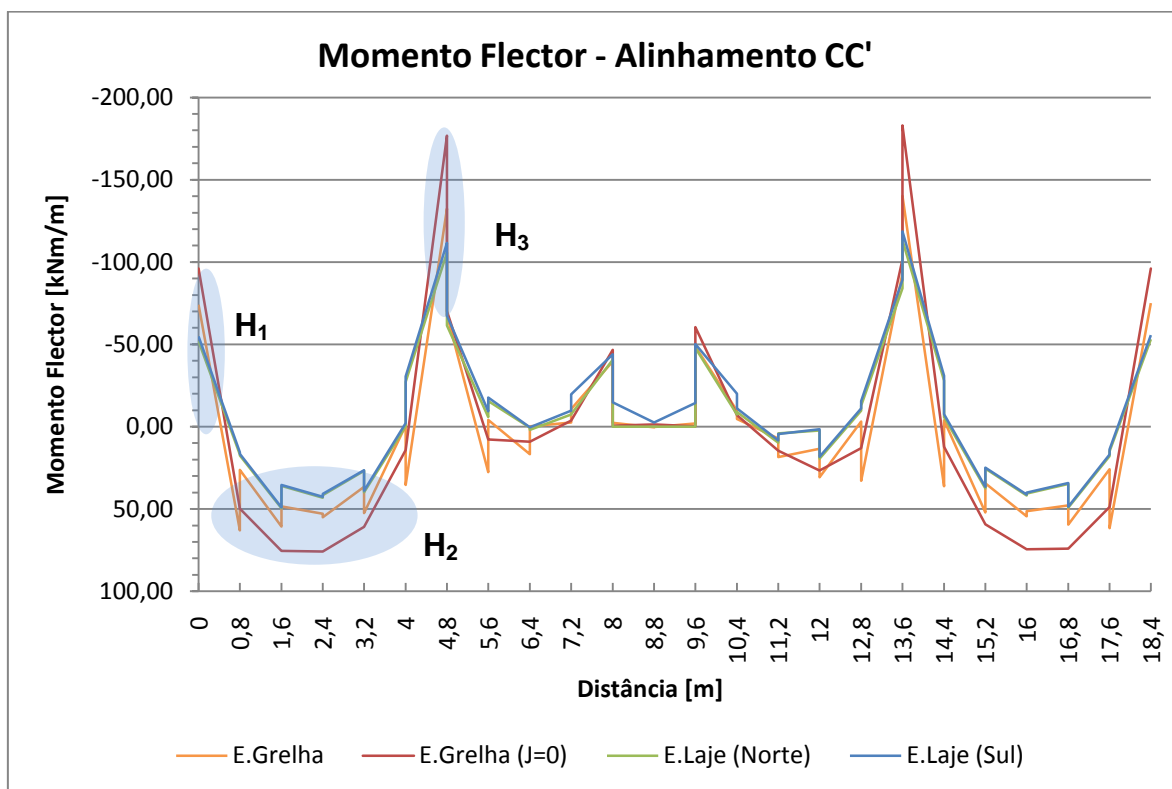


Gráfico 4.12 – Momento flector ao longo do alinhamento CC'

Conforme o esperado os resultados aqui obtidos, são similares aos resultados obtidos no Gráfico 4.8.

Comparando as linhas do momento flector relativas aos elementos de laje e elementos de grelha com e sem rigidez de torção, observam-se diferenças na ordem dos 35 e 44%, respectivamente, na zona H_1 , 36 e 53%, respectivamente, na zona H_2 e 27 e 40% respectivamente, na zona H_3 .

Destaque para a zona H_2 , situada a meio vão e sujeita a grandes deslocamentos, mas que nas análises anteriores não relevou diferenças tão significativas.

Importa ainda notar que a linha relativa ao momento flector do modelo de grelha sem rigidez de torção está invulgarmente distante das restantes linhas do momento flector, daí as diferenças atrás mencionadas serem tão largas.

Se, ao momento flector do modelo de elementos de laje se adicionar o momento torsor, nos mesmos moldes referidos na análise do alinhamento BB', obtém-se o seguinte gráfico (Gráfico 4.13):

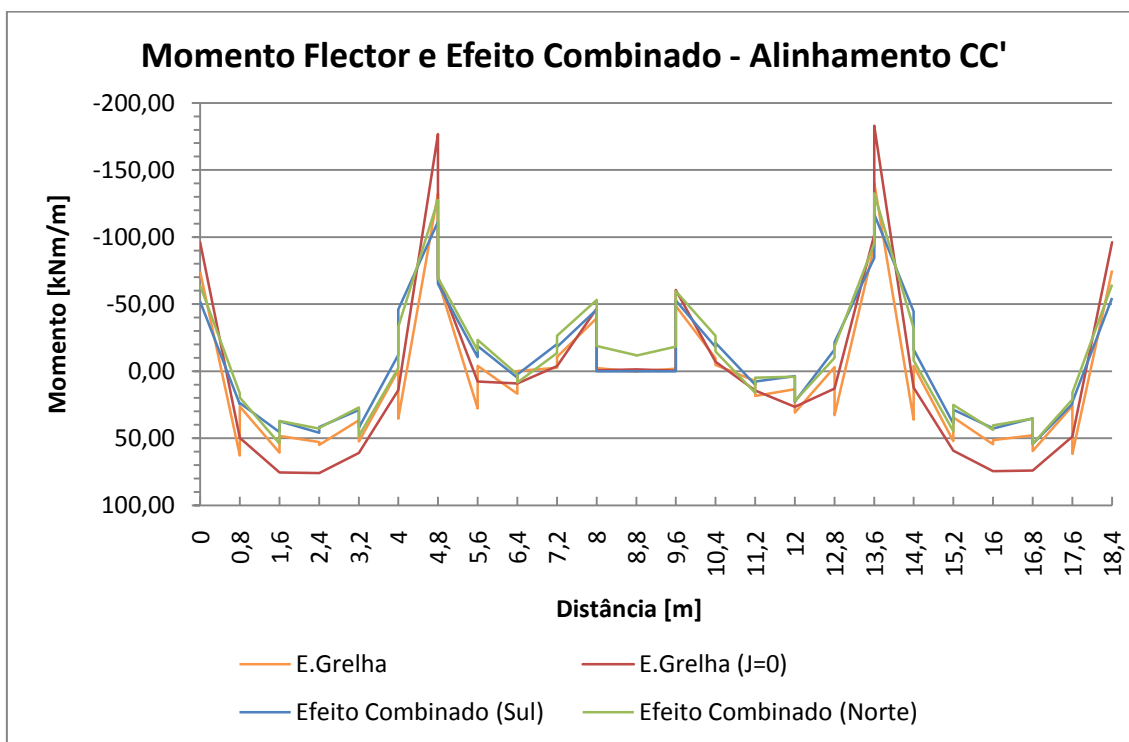


Gráfico 4.13 – Momento flector e Efeito Combinado no Alinhamento CC'

Da análise deste gráfico pode-se observar uma aproximação das linhas do momento total (Efeito Combinado) às linhas do momento flector do modelo de elementos de grelha.

Conclusão relativa aos esforços:

Quando comparando os gráficos obtidos na análise dos pontos ao longo do alinhamento AA' com os dos outros alinhamentos, pode-se ser induzido em erro, uma vez que este trabalha com valores bastantes inferiores aos valores verificados nos outros alinhamentos. Assim, este alinhamento pode excluir-se das conclusões que aqui se pretendem fazer, porque o dimensionamento aos ELU é feito com base nas zonas com maiores esforços.

Sobre as zonas mais rígidas do pavimento, o modelo de elementos de grelha obtém esforços transversos menores em relação aos valores obtidos pelo modelo de elementos de laje. No entanto na posterior análise dos gráficos relativos ao momento total, que incluem o efeito combinado, observa-se que as linhas relativas ao momento nos elementos de grelha são superiores. Se cruzarmos estas duas verificações com a relação directa do esforço transversal com o momento flector, constatamos que existe uma incoerência. A possível justificação para este facto está no efeito da tensão de pico nos elementos de laje.

5 Conclusões

Apesar de, actualmente, a grande maioria dos engenheiros civis usar os elementos de laje à disposição nos potentes programas de cálculo automático, é importante não só conhecer algumas das suas particularidades, como também aceitar que outros métodos possam também fornecer soluções muito próximas da solução exacta e com um pós-processamento muito menor.

Para além das conclusões retiradas em cada subcapítulo desta dissertação, de uma forma mais global pode-se tirar as seguintes conclusões:

Tendo em consideração a variação nos resultados obtida na parte experimental, apesar de ter sido prática corrente, actualmente não se justifica desprezar as parcelas de torção. No caso dos elementos de grelha, a sua consideração nos programas de cálculo é automática, pelo que não acresce qualquer esforço adicional. No caso da utilização dos elementos de laje é necessário algum pós-processamento. Para obter o momento total final é necessário adicionar a parcela do momento torsor ao momento flector obtido. Com isto demonstra-se alguma vantagem na utilização dos elementos de grelha perante os elementos de laje.

Apesar de, no modelo de elementos de grelha se ter obtido maior rigidez lateral, esta não é muito significativa em relação à rigidez lateral obtida com o modelo de elementos de laje, pelo que se considera que ambos os modelos possuem rigidez lateral muito semelhante.

Da análise dos deslocamentos efectuada, verificou-se que o modelo de elementos de grelha é mais flexível. No entanto, para efectuar uma comparação mais rigorosa e conclusiva seria necessário averiguar o nível de refinação da malha necessário e aceitável, uma vez que a abertura da malha utilizada foi igual para os dois modelos e não se verificou a qualidade da solução obtida perante uma solução mais refinada. Ou seja, o nível de refinamento em cada modelo pode não ser linear, podendo num modelo o refinamento ser suficiente, e no outro grosseiro.

Antes de entrar nas conclusões alusivas aos esforços é necessário ter em conta que estes nunca poderiam ser iguais uma vez que os modelos são diferentes. Assim, relativamente ao esforço transversal conclui-se que o modelo de elementos de laje obtém valores bastante superiores aos valores obtidos, pelo modelo de elementos de grelha. Contudo, é importante ter em conta que o esforço transversal num elemento de laje depende do momento flector e do momento torsor, que é mais elevado junto ao pilar e nas zonas de cantos. Já nos elementos de grelha o esforço transversal apenas depende do campo de deslocamentos transversais (5.1).

$$v_y^{grelha} = \frac{\partial M_y}{\partial y}; \quad v_y^{laje} = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (5.1)$$

Julga-se ser esta a justificação para o facto dos gráficos dos esforços transversos apresentarem valores tão elevados para o modelo de elementos de laje.

Importa também ter em conta que o modelo de elementos de laje é baseado na análise elástica das lajes, daí que no ponto de aplicação de cargas concentradas (como os pilares) os esforços tendem para infinito, fornecendo valores de esforços excessivamente elevados. Com isto pode-se constatar que o método da analogia de grelha é mais eficiente, uma vez que permite a redistribuição de esforços, facto que ocorre na estrutura real.

Relativamente à análise dos momentos flectores pode-se concluir que o modelo de elementos de grelha obtém sempre valores maiores do que o modelo de elementos de laje, apesar de ambas as soluções estarem muito próximas. Esta conclusão vai de encontro às características de convergência de ambas as metodologias, isto porque no modelo de elementos de laje, que tem como base o MEF, a solução aproximada é inferior à solução exacta e no modelo de elementos de grelha, baseado na analogia de grelha, a solução é sempre superior à solução exacta. Deste modo conclui-se que ambas as soluções aproximadas estão muito próximas da solução exacta.

Os resultados obtidos estão dentro do que era espectável, visto que os valores dos deslocamentos e esforços (momentos) obtidos pelo modelo de elementos de grelha são sempre superiores aos mesmos, quando obtidos pelo modelo de elementos de laje. Com isto, confirma-se que, o dimensionamento, utilizando a analogia de grelha, está sempre do lado da segurança.

Do ponto de vista da modelação, é vantajoso usar os elementos de laje fornecidos pelo programa de cálculo, uma vez que a sua aplicação é bastante intuitiva e não exige qualquer alteração de parâmetros ao invés da modelação da laje com elementos de grelha.

Por fim, conclui-se que, para efeitos de dimensionamento de estruturas regulares, o modelo de grelha é perfeitamente satisfatório, e que, pelo seu reduzido peso computacional, considera-se uma boa alternativa na engenharia civil.

6 Referências bibliográficas

1. CAMOTIN, D. **Resistência dos Materiais**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 1990.
2. FREITAS, T. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos - Estruturas Articuladas**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2009.
3. AZEVEDO, Á. F. M. **Método dos Elementos Finitos**. 1ª. ed. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2003.
4. LEITÃO, V.; CASTRO, L. **Análise de Estruturas I - Apontamentos sobre análise de lajes**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2005.
5. CASTRO, L. M. S. **Modelação de Lajes com Elementos de Grelha**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2001.
6. REIS, N. **Análise Estrutural de Pavimentos Rodoviários**. Lisboa: [s.n.], 2009.
7. TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. 2ª. ed. [S.l.]: MCGRAW-HILL, 1951.
8. NOVOZHILOV, V. V. **Theory of Elasticity**. Russia: Pergamon Press, 1961.
9. OLIVEIRA, E. R. D. A. E. **Elementos da Teoria da Elasticidade**. Lisboa: IST Press, 1999.
10. CASTRO, L. M. S. **Método dos Elementos Finitos - Análise de Pórticos Planos**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2009.
11. CASTRO, L. M. S. **Elementos Finitos para a Análise Elástica de Lajes**. Lisboa: IST, 2007.
12. REDDY, J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3ª Edição. ed. USA, Texas: McGraw- Hill, 2006.
13. HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. EUA: Dover Publications, Inc., 2000.
14. COOK, R.; MALKUS, D.; PLESHA, M. **Concepts and applications of finite element analysis**. 3ª. ed. EUA: Hamilton Printing Company, 1989.
15. FREITAS, A. T. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos - Elasticidade Plana e Tridimensional**. Lisboa: IST, 2009.

16. ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finit Element Method - Solid Mechanics**. 5ª. ed. [S.I.]: Butterworth-Heinemann, v. 2, 2000.
17. SORIANO, H. L. **Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 2003.
18. ZIENKIEWICZ, O. C. **The Finit Element Method in Engineering Science**. 2ª Edição. ed. [S.I.]: McGRAW-HILL, 1971.
19. BATOZ; BATHE; HO. A study of three-node triangular plate bending elements. [S.I.]: International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. Volume 15, 1980. p. 1771-1812.
20. MESQUITA, A.; CODA, H. **Uma formulação do método dos elementos finitos aplicada à análise elastoplástica de cascas**. São Carlos: Caderno de Engenharia de Estruturas, v. Volume 7, 2005.
21. BATOZ, J. L. **An explicit formulation for an efficient triangular late-bending element**. [S.I.]: International Journal for Numeriacal Methods in Engineering, v. Volume 18, 1982.
22. STRAMANDINOLI, J. **Contribuição à análise de lajes nervuradas por analogia de grelha**. [S.I.]: [s.n.], 2003.
23. HAMBLY, E. C. **Bridge Deck Behavior**. 2ª. ed. EUA: Taylor & Francis, 1991.
24. KIMURA, A. **Informática aplicada em estruturas de concreto armado**. São Paulo: Pini, 2007.
25. REIS, A. J. **Dimensionamento de Estruturas**. Lisboa: IST, 2001.
26. MARCHÃO, C.; APPLETON, J. **Betão Armado e Pré-Esforçado II - Lajes de Betão Armado**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2006.
27. REGULAMENTO de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado, decreto lei nº349- C/83. Lisboa: Imprensa Nacional - Casa da Moeda, 1983.
28. QUALIDADE, I. P. **Eurocódigo 2: Projecto de estruturas de Betão - Parte 1.1:Regras gerais e regras para Edifícios**. Lisboa: [s.n.], 1998.
29. CSI. **Anlysis Reference Manual for SAP2000**. [S.I.]: [s.n.], 2007.
30. CXS COMPUTING. **Formação Nível Básico SAP2000**. [S.I.]: [s.n.], 2008.

31. MARCHÃO, C.; APPLETON, J. **Betão Armado e Pré-Esforçado I - Introdução ao Comportamento das Estruturas de Betão Armado**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 2007.
32. TIMOSHENKO, S. **Theory of plates and shells**. 2ª. ed. United States of America: McGraw-Hill, 1987.
33. DHATT, G.; TOUZOT, G. **The Finit Element Method Displayed**. Norwich: John Wiley & Sons, 1984.
34. BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. USA: Prentice Hall, 1996.
35. AZEVEDO, Á. F. M. **Mecânica dos Sólidos**. Porto: Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.
36. RAÚL, S. **Métodos de Análise Elástica de lajes de Edifícios**. Lisboa: Instituto Superior Técnico, 1988.

A. Funções de aproximação

A.1 Elemento ACM

$$\varphi_1(x, y) = 1 - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{2x^3}{a^3} - \frac{xy}{ab} + \frac{3x^2y}{a^2b} - \frac{2x^3y}{a^3b} - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{3xy^2}{ab^2} + \frac{2y^3}{b^3} - \frac{2xy^3}{ab^3};$$

$$\varphi_2(x, y) = x - \frac{2x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} - \frac{xy}{b} + \frac{2x^2y}{ab} - \frac{x^3y}{a^2b};$$

$$\varphi_3(x, y) = y - \frac{xy}{a} - \frac{2y^2}{b} + \frac{2xy^2}{ab} + \frac{y^3}{b^2} - \frac{xy^3}{ab^2};$$

$$\varphi_4(x, y) = \frac{3x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{xy}{ab} - \frac{3x^2y}{a^2b} + \frac{2x^3y}{a^3b} - \frac{3xy^2}{ab^2} + \frac{2xy^3}{ab^3};$$

$$\varphi_5(x, y) = -\frac{x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2} + \frac{x^2y}{ab} - \frac{x^3y}{a^2b};$$

$$\varphi_6(x, y) = \frac{xy}{a} - \frac{2xy^2}{ab} + \frac{xy^3}{ab^2};$$

$$\varphi_7(x, y) = -\frac{xy}{ab} + \frac{3x^2y}{a^2b} - \frac{2x^3y}{a^3b} + \frac{3xy^2}{ab^2} - \frac{2xy^3}{ab^3};$$

$$\varphi_8(x, y) = -\frac{x^2y}{ab} + \frac{x^3y}{a^2b};$$

$$\varphi_9(x, y) = -\frac{xy^2}{ab} + \frac{xy^3}{ab^2};$$

$$\varphi_{10}(x, y) = \frac{xy}{ab} - \frac{3x^2y}{a^2b} + \frac{2x^3y}{a^3b} + \frac{3y^2}{b^2} - \frac{3xy^2}{ab^2} - \frac{2y^3}{b^3} + \frac{2xy^3}{ab^3};$$

$$\varphi_{11}(x, y) = \frac{xy}{b} - \frac{2x^2y}{ab} + \frac{x^3y}{a^2b};$$

$$\varphi_{12}(x, y) = -\frac{y^2}{b} + \frac{xy^2}{ab} + \frac{y^3}{b^2} - \frac{xy^3}{ab^2};$$

A representação gráfica de cada uma das função de aproximação apresenta-se na seguinte (Figura A.1):

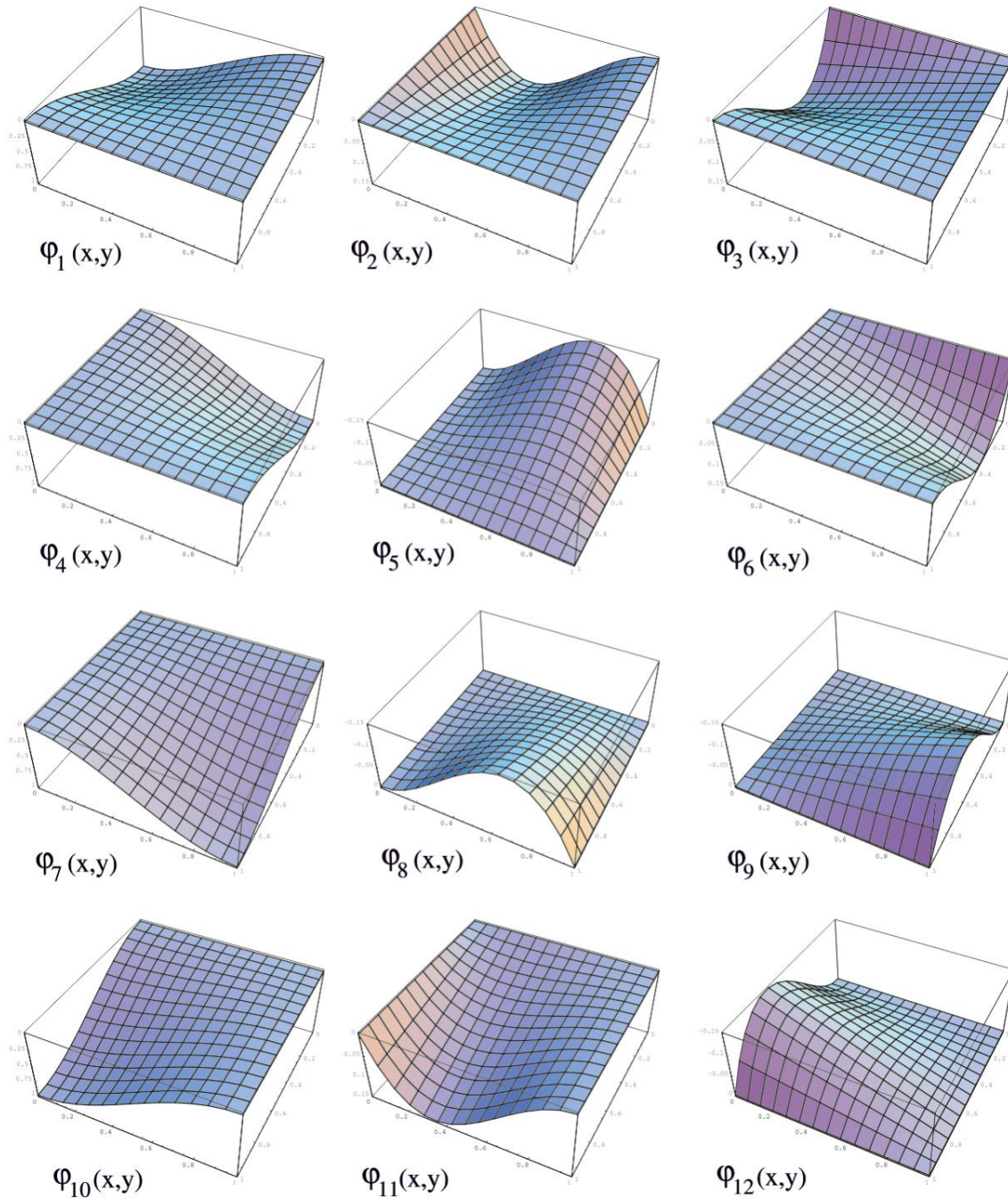


Figura A.1 – Significado físico da aproximação do elemento ACM [11]

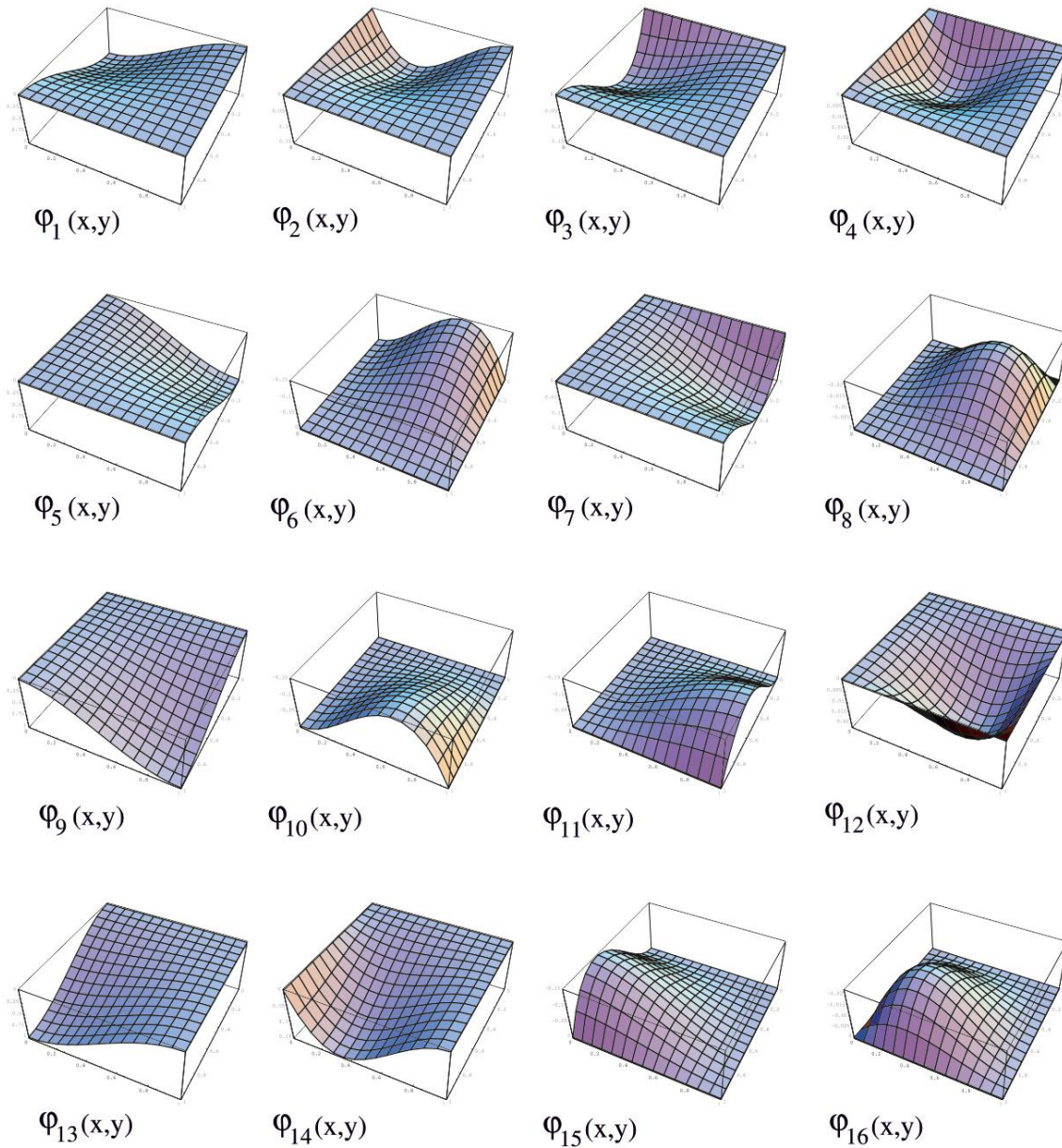
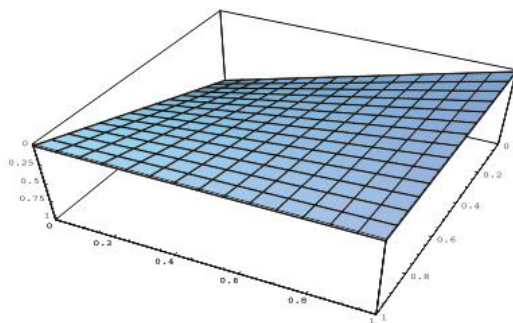
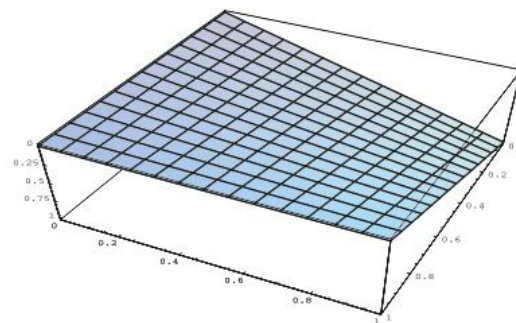
A.2 Significado físico das funções de forma do elemento BFS

Figura A.2 – Significado físico da aproximação do elemento BFS [11]

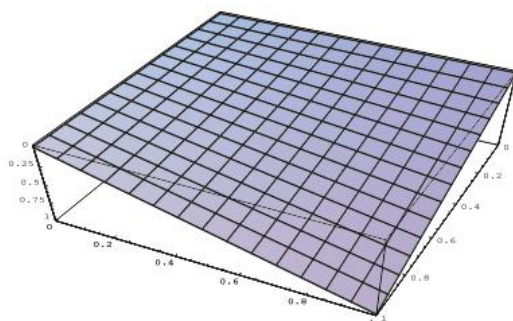
A.3 Elemento rectangular de 4 nós para lajes de Reissner-Mindlin



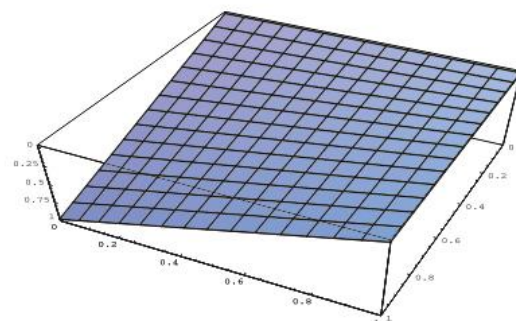
$\varphi_1(x,y)$



$\varphi_2(x,y)$



$\varphi_3(x,y)$



$\varphi_4(x,y)$

Figura A.3 – Significado físico da aproximação para elemento trapezoidal de 4 nós

B. Desenhos de arquitectura

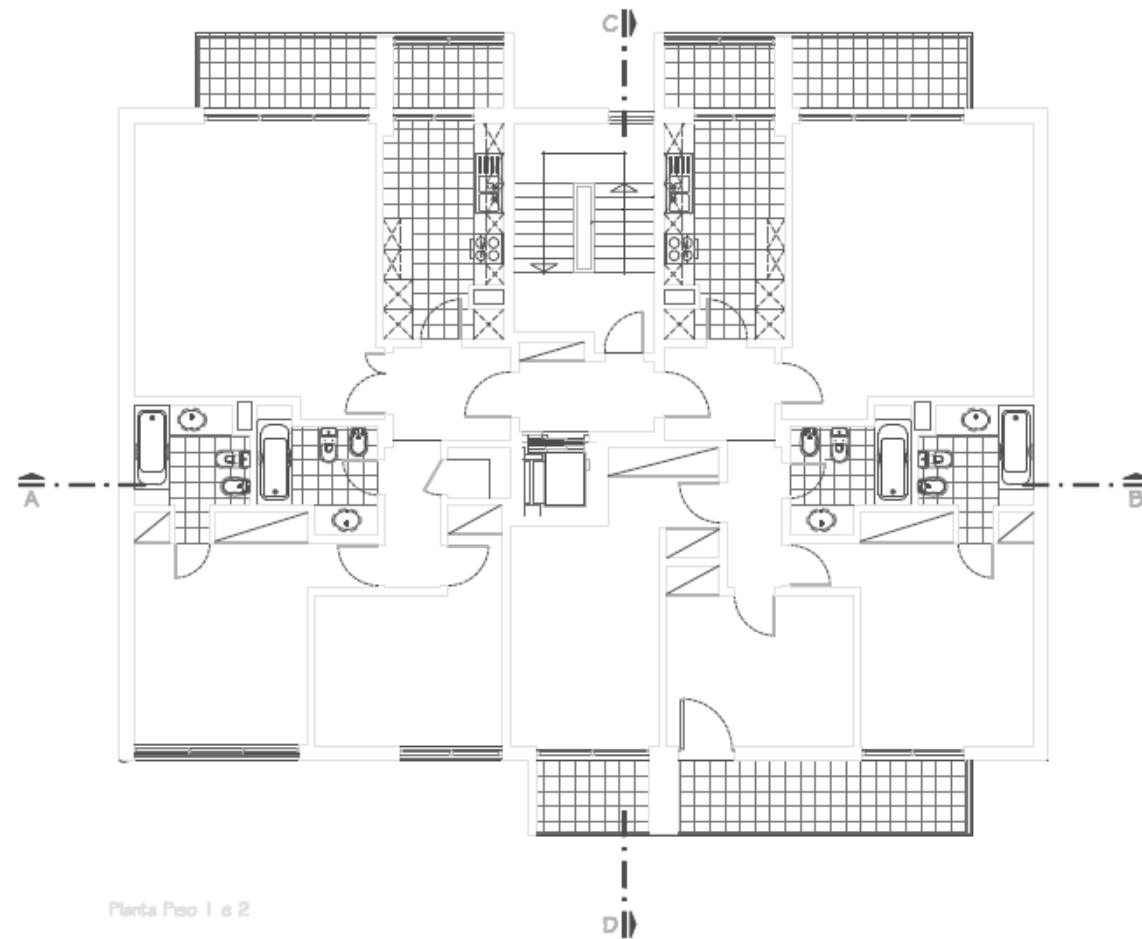


Figura B.1 – Planta do Piso 1,2 e 3



Figura B.2 – Corte AB

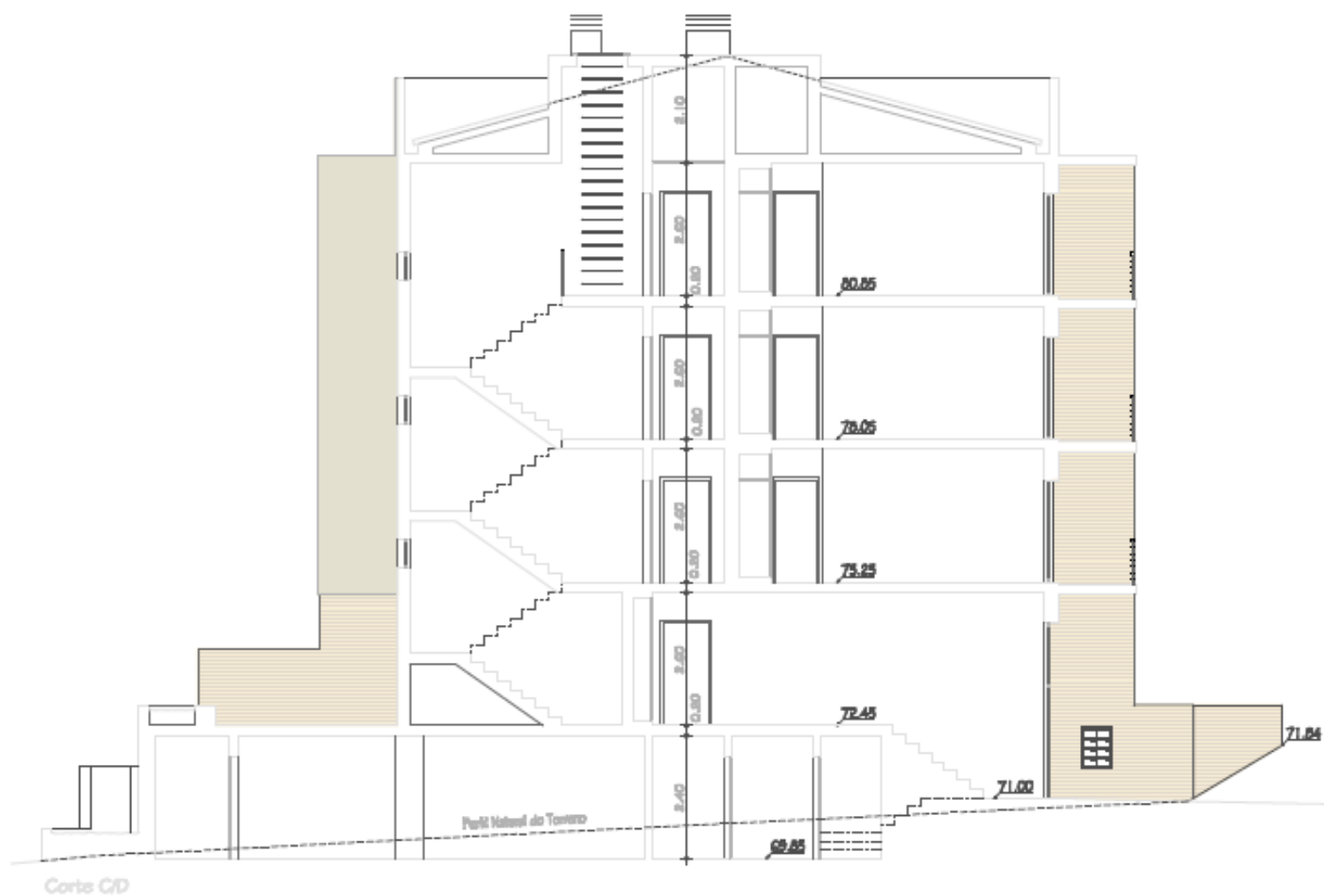


Figura B.3 – Corte CD

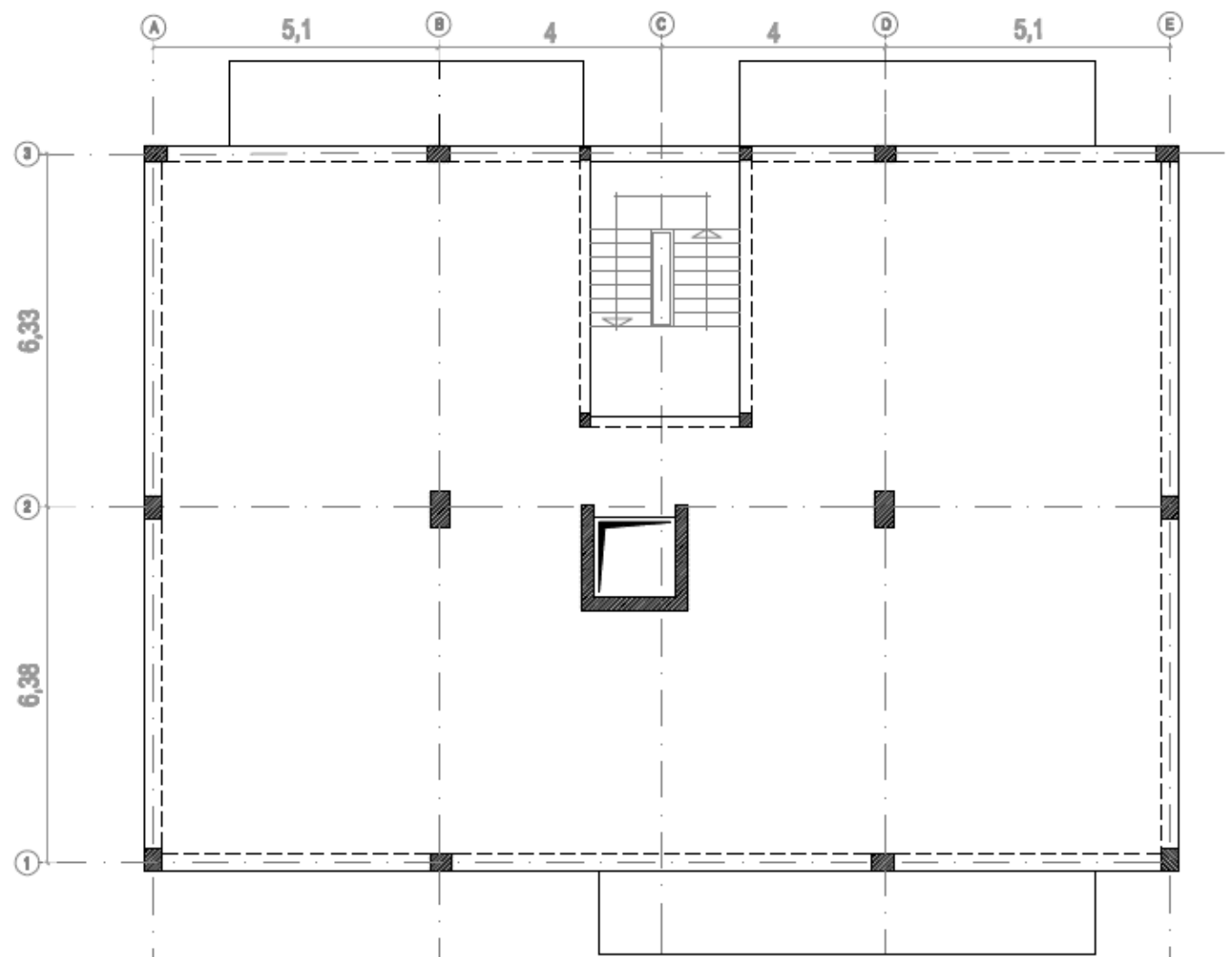


Figura B.4 – Planta estrutural do piso 1, 2 e 3

C. Modos de Vibração

1º Modo de vibração - Rotação linear centrada no núcleo do elevador em torno de z:

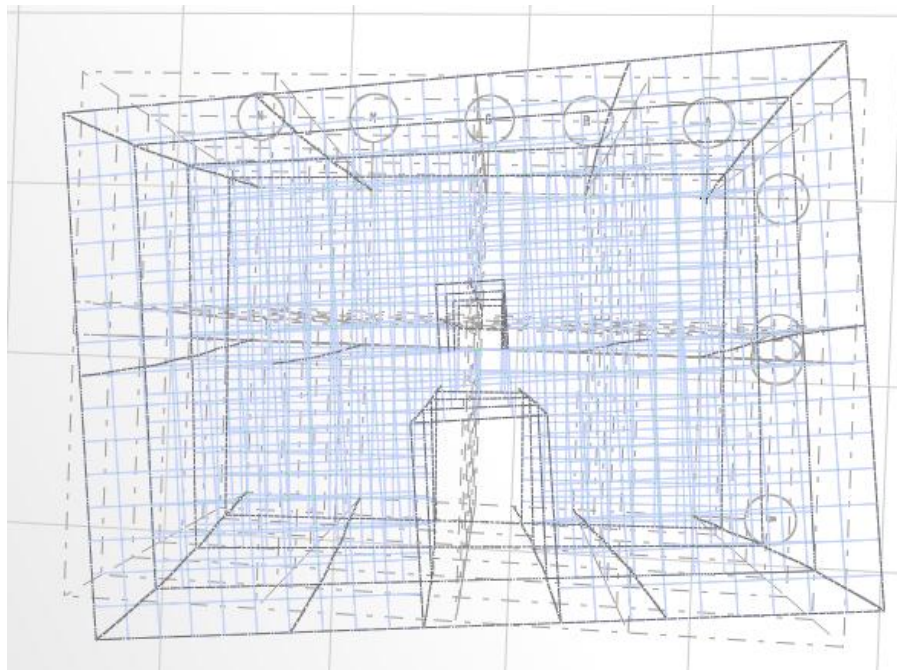


Figura C.1 – 1º Modo de vibração

2º Modo de vibração – rotação linear centrada no pilar de canto em torno de z:

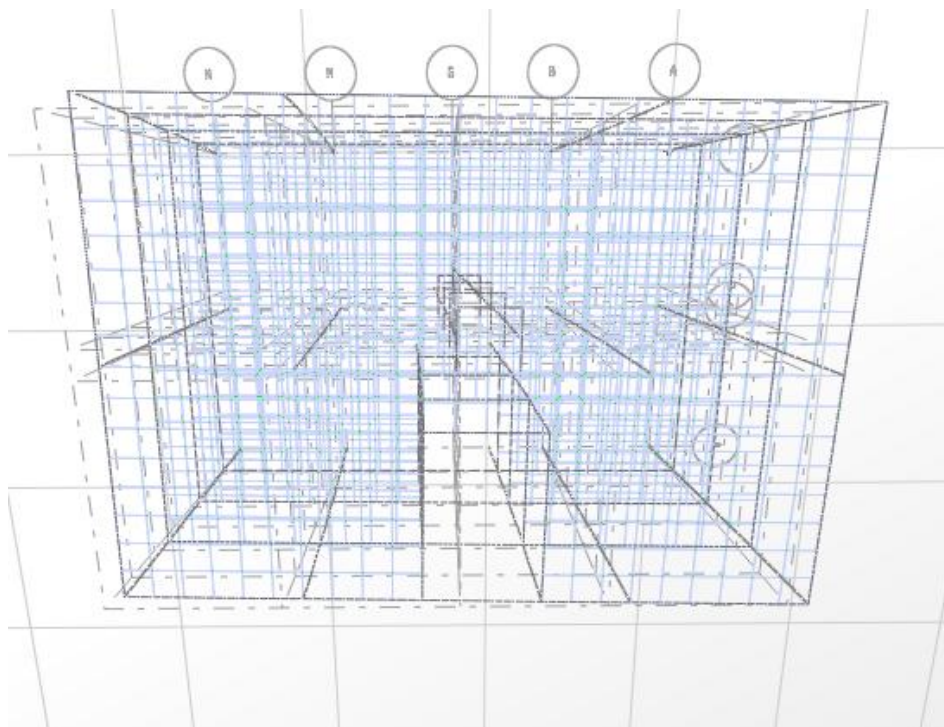


Figura C.2 – 2º Modo de vibração

3º Modo de vibração – Translação linear na direcção y:

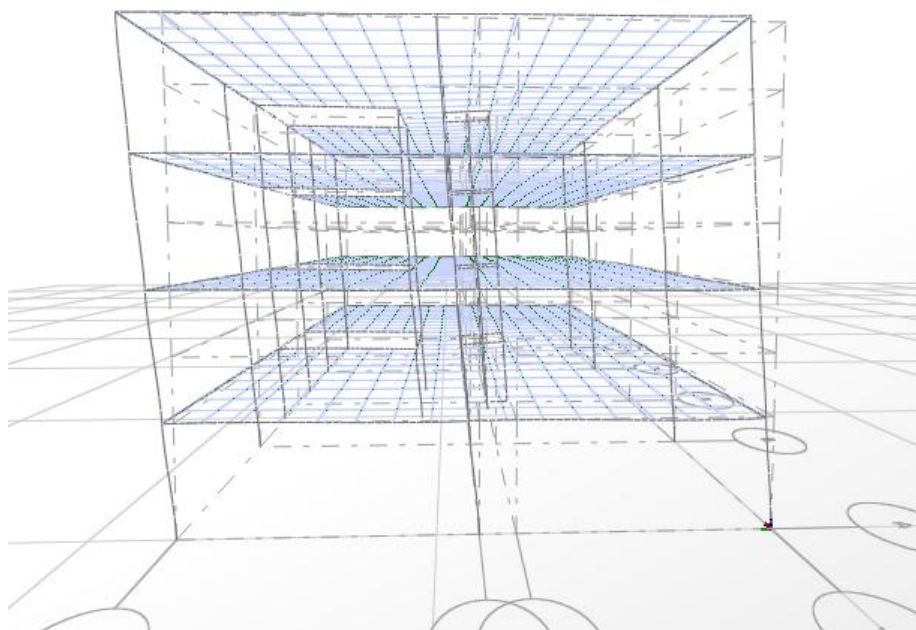


Figura C.3 – 3º Modo de vibração

4º Modo de vibração – rotação parabólica centrada no núcleo do elevador em torno de z:

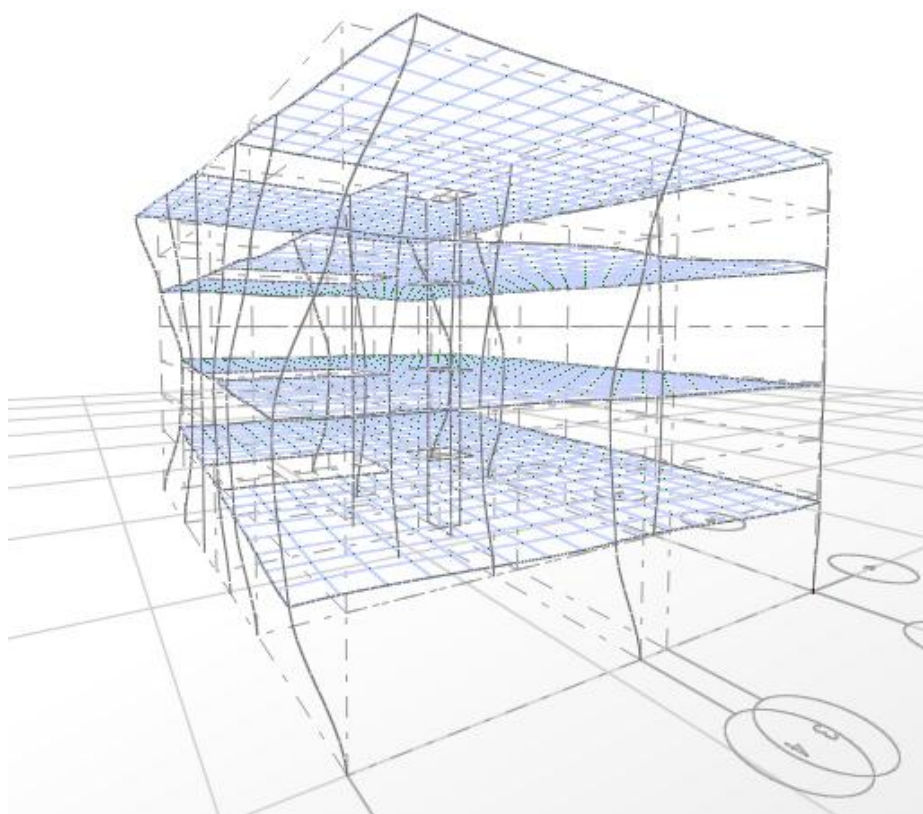


Figura C.4 – 4º Modo de vibração

5º Modo de vibração – Translação parabólica na direcção x:

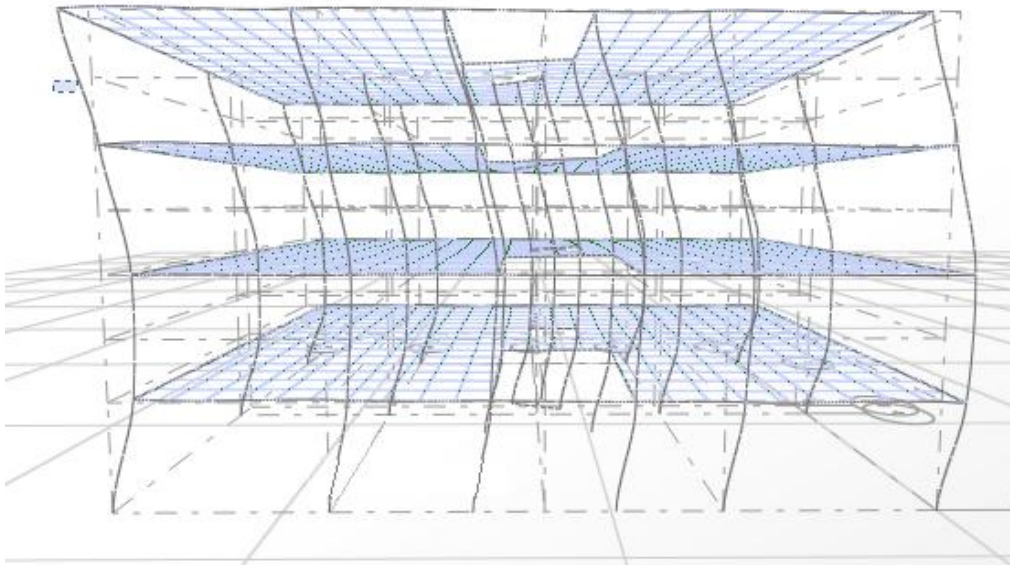


Figura C.5 – 5º Modo de vibração

6º Modo de vibração – Translação parabólica na direcção y

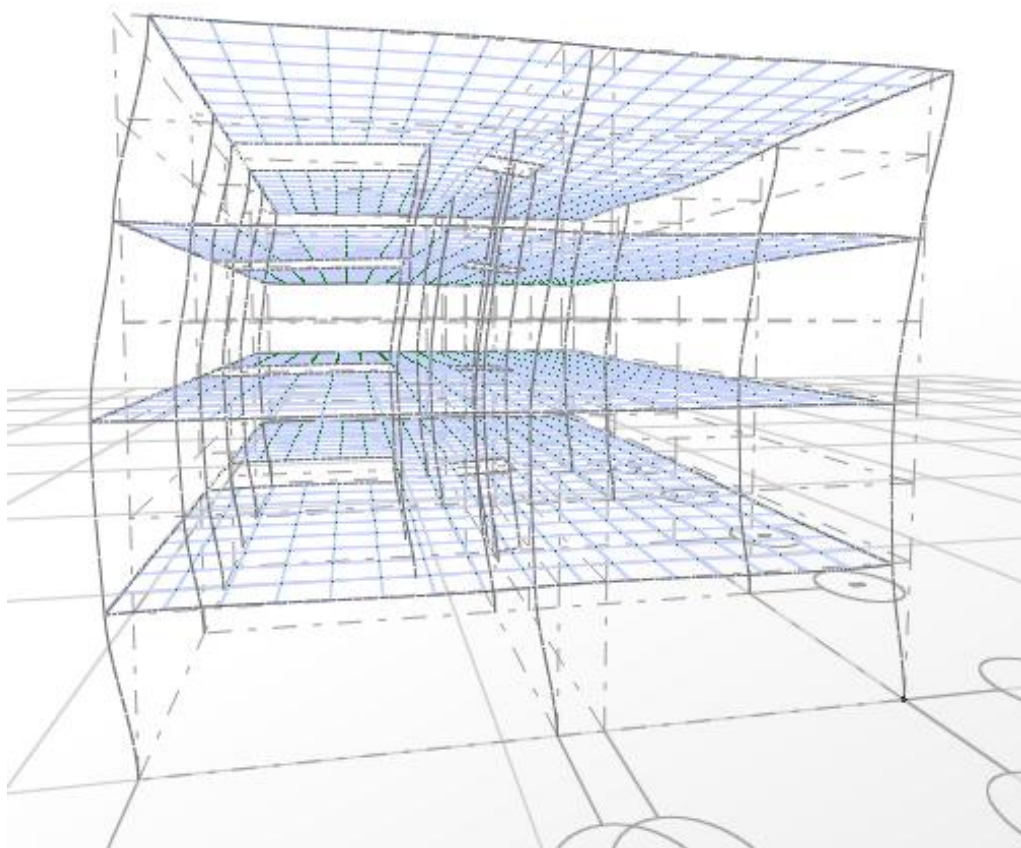


Figura C.6 – 6º Modo de vibração

7º Modo de vibração – rotação cúbica centrada no núcleo do elevador em torno de z:

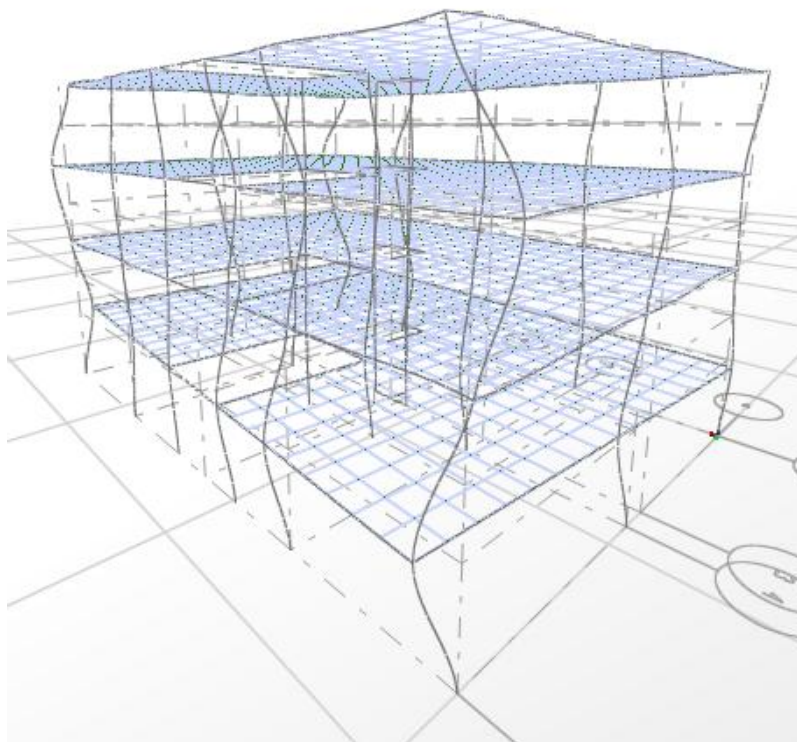


Figura C.7 – 7º Modo de vibração

8º Modo de vibração – rotação cúbica centrada no núcleo do elevador em torno de z:

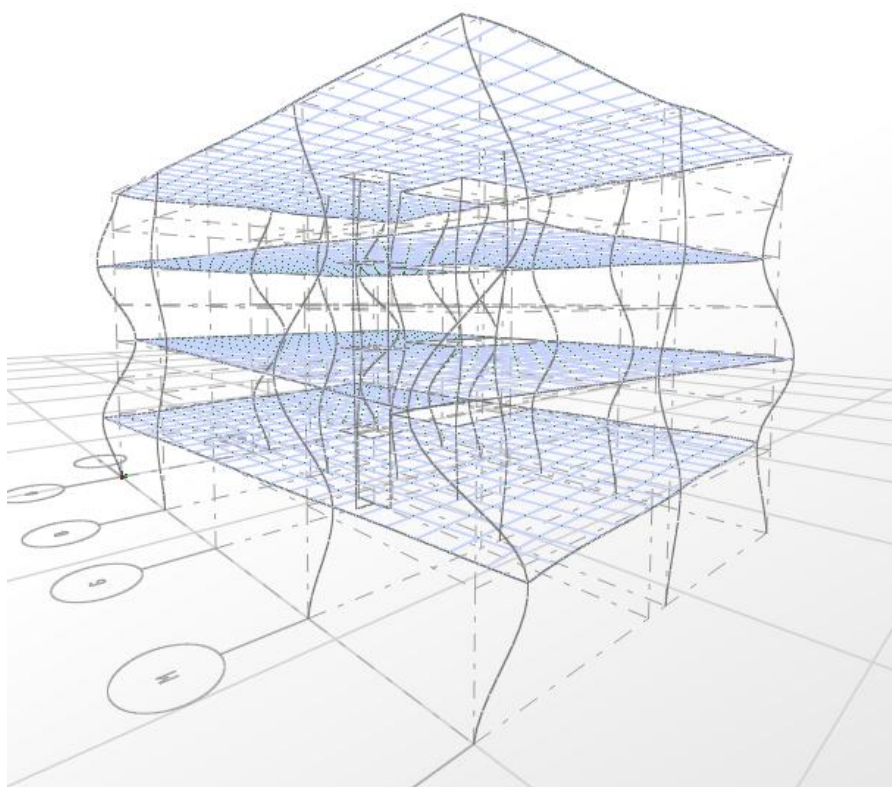


Figura C.8 – 8º Modo de vibração

9º Modo de vibração – Translação cúbica na direcção x:

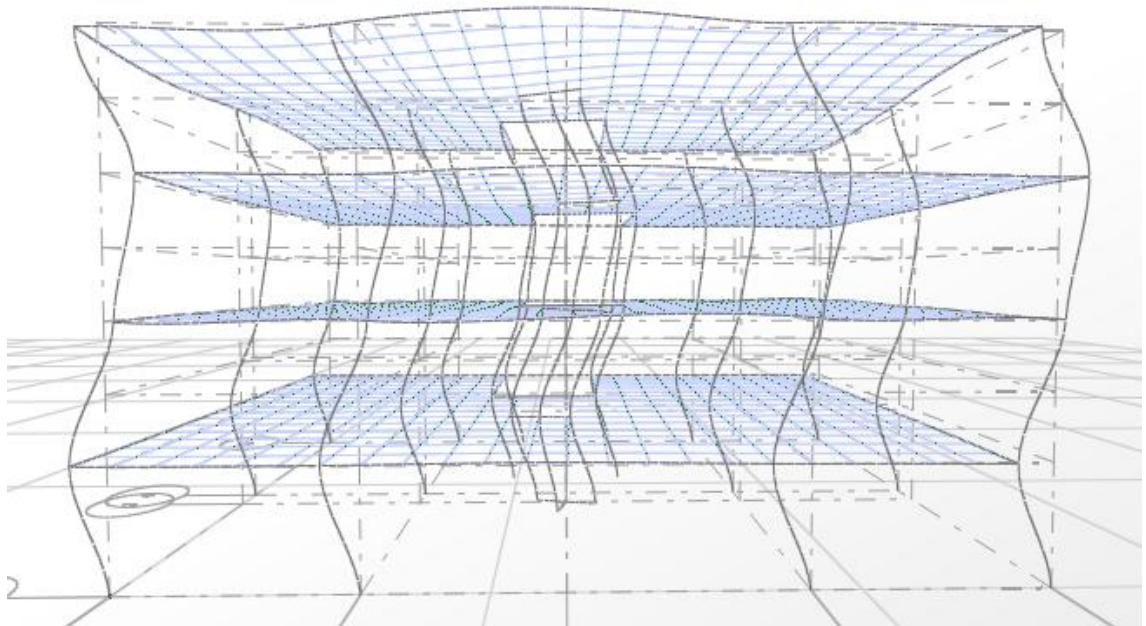


Figura C.9 – 9º Modo de vibração

10º Modo de vibração – deformação esférica de um plano de laje:

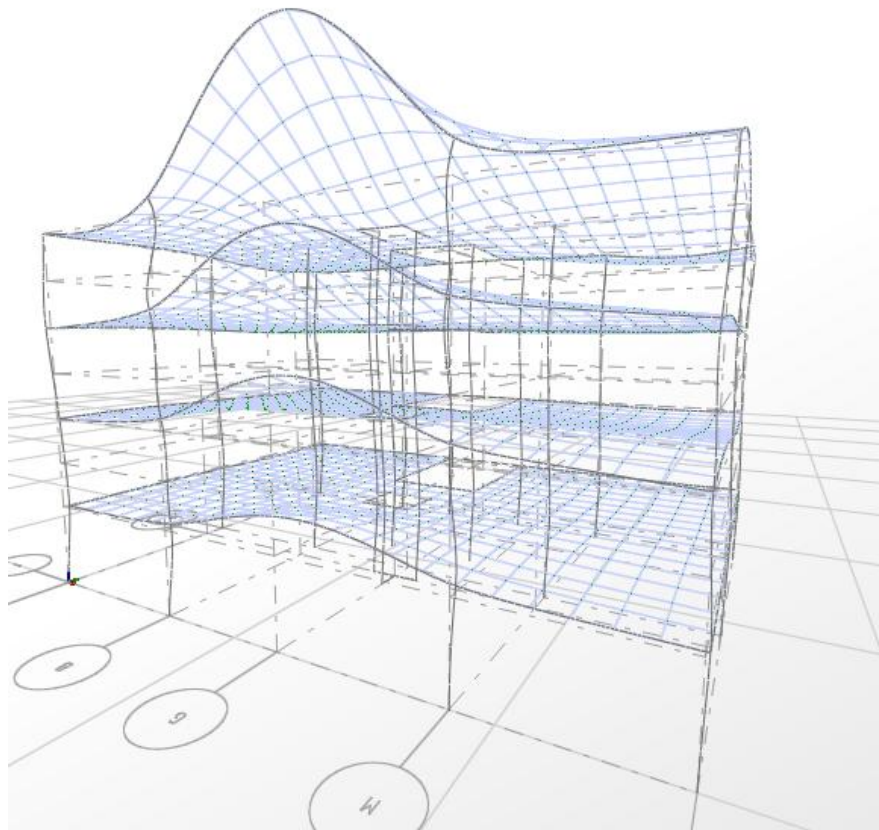


Figura C.10 – 10º Modo de vibração

